

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences Techniques)

Session principale 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit-il ?

*** Résolution d'une équation du second degré dans IC**

*** Recherche d'ensembles de points.**

*** Complexe et géométrie.**

1) a) $(1-2i\sqrt{2})^2 = 1 - 2 \times 1 \times 2i\sqrt{2} + (2i\sqrt{2})^2 = 1 - 4i\sqrt{2} - 4 \times 2 = 1 - 4i\sqrt{2} - 8 = -7 - 4i\sqrt{2}$

b) $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (2+i\sqrt{2}) = 1 - 8 - 4i\sqrt{2} = -7 - 4i\sqrt{2} = (-2i\sqrt{2})^2$; $S = 1 - 2i\sqrt{2}$

$$z' = \frac{1 - (1 - 2i\sqrt{2})}{2} = \frac{-2 + 2i\sqrt{2}}{2} = -1 + i\sqrt{2}$$

$$z'' = \frac{-1 + (1 - 2i\sqrt{2})}{2} = \frac{-2i\sqrt{2}}{2} = -i\sqrt{2}$$

$$S_C = \{-1 + i\sqrt{2} ; -i\sqrt{2}\}$$

2) $\frac{z_{\overline{CA}}}{z_{\overline{CB}}} = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-i\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-1 + i\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{-2i\sqrt{2}}{-1} = 2i\sqrt{2}$

Donc $\frac{z_{\overline{CA}}}{z_{\overline{CB}}} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overline{CA} \perp \overline{CB}$, donc ABC est un triangle rectangle en C, ainsi $C \in \ell_{[AB]}$.

3) a) $z' = \frac{z + 1 - i\sqrt{2}}{z + i\sqrt{2}} = \frac{z - (-1 + i\sqrt{2})}{z - (i\sqrt{2})} = \frac{z_{\overline{BM}}}{z_{\overline{AM}}}$

Donc $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_{\overline{BM}}}{z_{\overline{AM}}} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overline{BM} \perp \overline{AM}$

Ainsi $M \in \zeta_{[AB]}$

b) $|z'| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z_{\overline{BM}}}{z_{\overline{AM}}} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Rightarrow MA = MB$.

Ainsi $M \in \text{med } [AB] = \Delta$.

4) a) $z_{E'} = \frac{z_E + 1 - i\sqrt{2}}{z_E + i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + 1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)} = \frac{i\left[\sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\right]}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)} = -i$

b) D'après 3) a) $z_{E'} = -i \in i\mathbb{R} \Rightarrow E' \in \zeta$

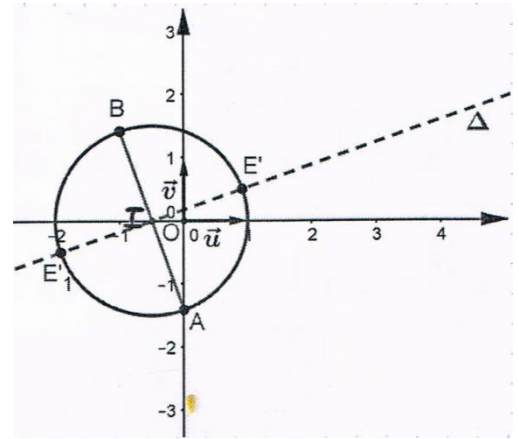
D'après 3) b) $|z_{E'}| = 1 \Rightarrow E' \in \Delta$ donc $E' \in \zeta \cap \Delta$

* Le deuxième point E'_1 est le symétrique de E'

par rapport $I = A * B$ donc $A * B = E' * E_1'$

$$\Leftrightarrow \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_{E'} + z_{E_1'}}{2} \Leftrightarrow z_{E_1'} = z_A + z_B - z_{E'}$$

$$\text{Donc } z_{E_1'} = \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}i \text{ Ainsi } \Delta \cap \zeta = \{E'; E_1'\}$$



Exercice 2 :

De quoi s'agit-il ?

* **Produit vectoriel**

* **Plan défini par trois points non alignés**

* **Equations (cartésienne et paramétriques) de plans - Positions relatives de 2 plans**

* **Equation réduite d'une sphère - Position relative d'une sphère et d'un plan**

* **Intersection de 3 plans.**

$$1) a) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ne sont pas colinéaires, d'où A, B et C ne sont pas}$$

alignés, ainsi A, B et C définissent un plan P.

$$c) \left. \begin{array}{l} * 2 \times 0 - (-1) + 0 - 1 = 0 \text{ donc } A \in P \\ * 2 \times 1 - 1 + 0 - 1 = 0 \text{ donc } B \in P \\ * 2 \times 0 - 0 + 1 - 1 = 0 \text{ donc } C \in P \end{array} \right\} \text{ ainsi } (AB) = P$$

Autrement

$$* \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de P donc } P : 2x - y + z + d = 0$$

$$\text{Or } A(0, -1, 0) \in P \text{ sig } 2 \times 0 - (-1) + 0 + d = 0 \text{ sig } d = -1$$

$$\text{Ainsi } P : 2x - y + z - 1 = 0.$$

$$2) \vec{M}_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal du Q.}$$

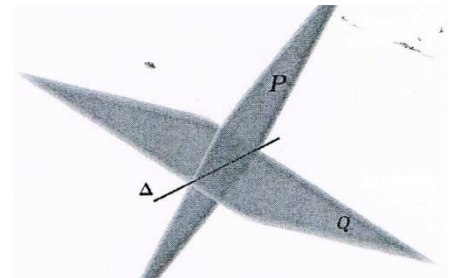
$$\vec{M}_P \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal du P.}$$

$$\text{et } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0, \text{ donc } \vec{M}_Q \text{ et } \vec{M}_P \text{ ne sont pas colinéaires,}$$

ainsi P et Q sont sécantes suivant une droite Δ .

$$* \Delta = P \cap Q : \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ 2\alpha - y + z - 1 = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \alpha + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y - z = 2\alpha - 1 \quad (1) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ y - 2z = -\alpha - 1 \quad (2) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = z + 2\alpha - 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 5\alpha - 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = 3\alpha \end{cases}$$

$$3) a) S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = \frac{4}{3} + 1^2 + 1^2 = \frac{2}{3} > 0$$

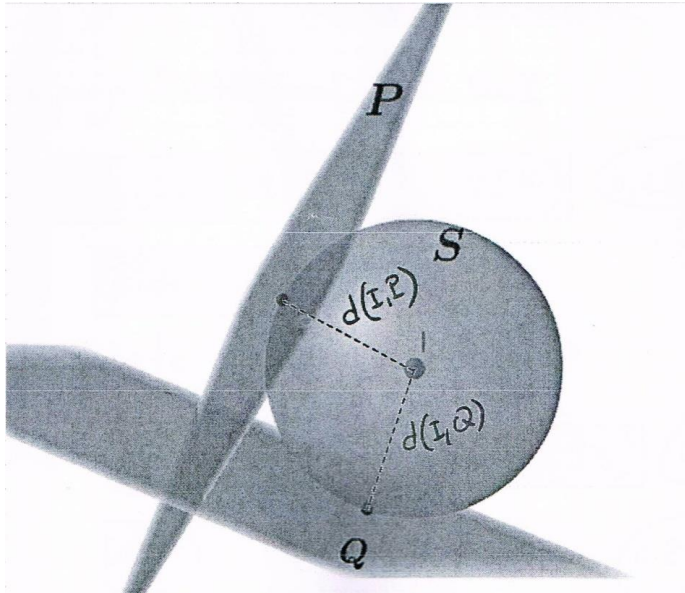
Ainsi S est une sphère de centre $I(-1, 0, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$b) * d(I, P) = \frac{|P_I|}{\|\vec{M}_P\|} \text{ avec } P_I = 2 \times (-1) - 0 + 1 - 1 = -2 \text{ et } \|\vec{M}_P\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$* d(I, Q) = \frac{|Q_I|}{\|\vec{M}_Q\|} \text{ avec } Q_I = -1 + 0 - 2 + 1 = -2 \text{ et } \|\vec{M}_Q\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc } d(I, P) = d(I, Q) = \frac{2}{\sqrt{6}} = R$$

Ainsi S est tangente à chacun des plan P et Q.



4) a)

* J le projeté orthogonal de I sur P

Donc $P \perp (IJ)$ or $(IJ) \subset (IJK)$, ainsi $P \perp (IJK)$

* K le projeté orthogonal de I sur Q

Donc $Q \perp (IK)$ or $(IK) \subset (IJK)$

Ainsi $Q \perp (IJK)$

b) On a :

$$\begin{cases} P \cap Q = \Delta \\ P \perp (IJK) \\ Q \perp (IJK) \end{cases}$$

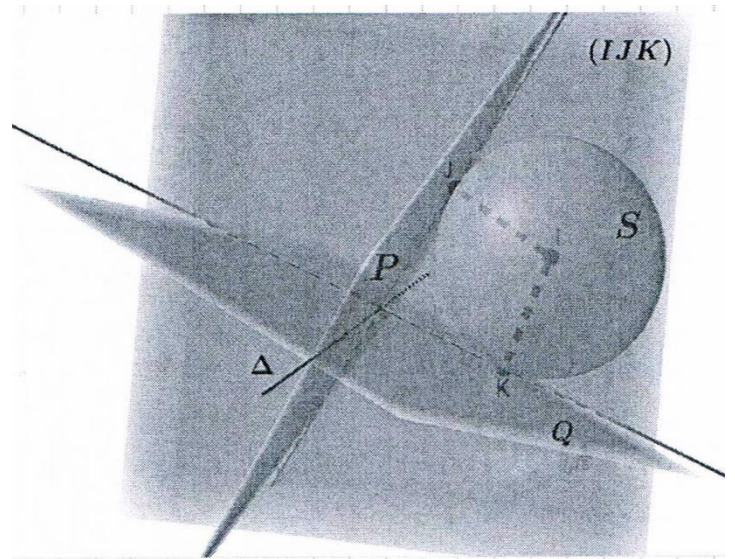
donc $\Delta \perp (IJK)$

ainsi $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et aussi est un vecteur normal à (IJK) ,

donc $(IJK) : x + 5y + 3z + d = 0$

or $I(-1, 0, 1) \in (IJK)$ sig $-1 + 0 + 3 + d = 0$ sig $d = -2$

ainsi $(IJK) : x + 5y + 3z - 2 = 0$

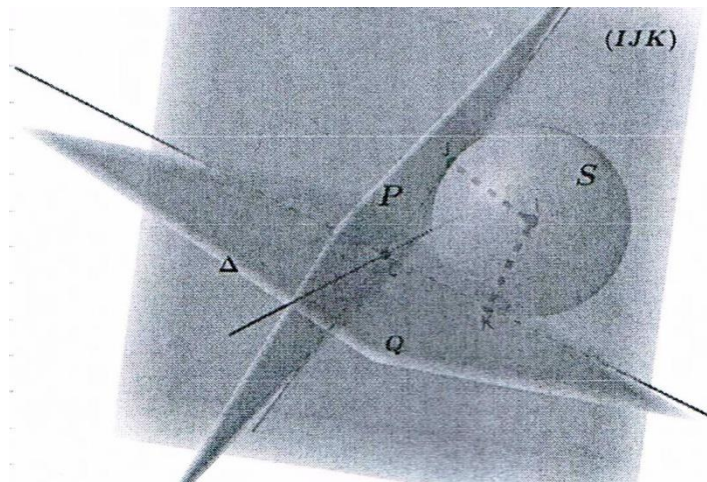


c)

$$* P \cap Q \cap (IJK) = \{L(x, y, z)\} \Leftrightarrow \Delta \cap (IJK) = \{L(x, y, z)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L \in (IJK) \\ L \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y+3z-2=0 \\ x=\alpha \\ y=5\alpha-1 \\ z=3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{5} \\ x=\frac{1}{5} \\ y=0 \\ z=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ainsi $L\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$.



Exercice 3 :

De quoi s'agit-il ?

Probabilité : Probabilités conditionnelles - Arbre de choix - Probabilités composées - Probabilités totales - Variable aléatoire - Espérance mathématique.

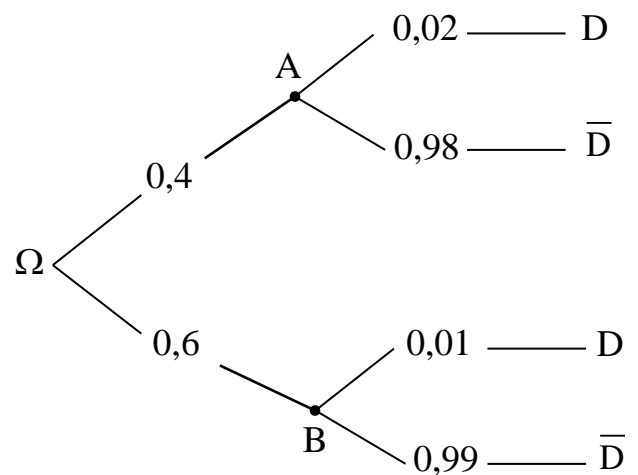
1) a) * $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

* $p(D / A) = \frac{2}{100} = 0,02$

* $p(\bar{D} / A) = 1 - p(D / A) = 1 - 0,02 = 0,98$

* $p(D / B) = \frac{1}{100} = 0,01$

* $p(\bar{D} / B) = 1 - p(D / B) = 1 - 0,01 = 0,99$



$$\begin{aligned} \text{b) } p(D) &= p(D \cap A) + p(D \cap B) \\ &= 0,02 \times 0,4 + 0,01 \times 0,6 = 0,014 \end{aligned}$$

$$\text{c) } p(A/D) = \frac{p(AD)}{p(D)} = \frac{0,02 \times 0,4}{0,01} \approx 0,571$$

2) * Le nombre de circuits présentant un défaut est : $1000 \times p(D) = 10000 \times 0,014 = 140$

* Le nombre de circuits sans défaut est : $10\,000 - 140 = 9860$

Ainsi le bénéfice moyen réalisé chaque semaine est :

$$p(\bar{D}) \times 0,3 + p(D) \times (-0,5) = 9860 \times 0,3 + 140 \times (-0,5) = 2888 \text{ DT}$$

Autrement :

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique de chaque circuit.

Donc $X(\Omega) = \{-0,5 ; 0,3\}$.

* $p(X = -0,5) = p(D) = 0,014$

* $p(X = 0,3) = 1 - p(D) = 1 - 0,014 = 0,986$

* La loi de X est donnée par le tableau suivant

x_i	-0,5	0,3
$p(X = x_i)$	0,014	0,986

* Donc le bénéfice moyen pour chaque circuit est :

$$E(X) = -0,5 \times 0,014 + 0,3 \times 0,986 = 0,2888 \text{ DT}$$

* Ainsi le bénéfice moyen réalise chaque semaine est : $10000 \times E(X) = 2888 \text{ DT}$


Exercice 4 :

De quoi s'agit-il ?

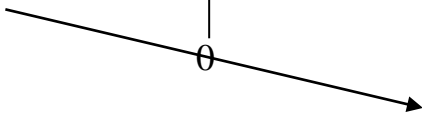
Fonction logarithme - Théorème des valeurs intermédiaires - Position relative de deux courbes - Calcul d'aires.


1) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$

$$g'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$			

b) $g(1) = -1 + 1 - 2\ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$			

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		+	-
			

2) a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \end{array} \right\} \text{alors } \lim_{0^+} f = -\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote à (ζ).

b) $\lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0 + 0 = 0$

l'axe des abscisses est asymptote à (ζ) au voisinage de $+\infty$.

3) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ est $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - 2x(x + \ln x)}{x^4} = \frac{x^2 + x - 2x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x^2 + x - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x(-x + 1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	⊖
$f(x)$		1	

$-\infty \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} 0$

$$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1^2} = 1$$

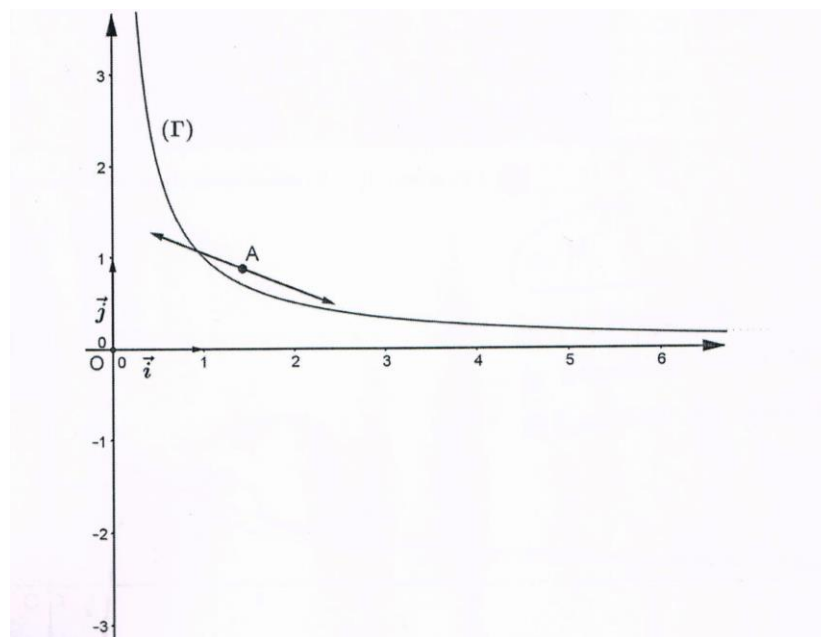
c) * $\forall x \in [1, +\infty[; f(x) > 0$, donc $\forall x \in [1, +\infty[f(x) \neq 0$

* f est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $]-\infty, 1]$, donc $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]0, 1]$

Ainsi $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution β .

$$\left. \begin{array}{l} f(0,56) \approx 0,6 < 0 \\ f(0,57) \approx 0,02 > 0 \end{array} \right\} \text{ alors } \beta \in]0,56 ; 0,57[$$

4)

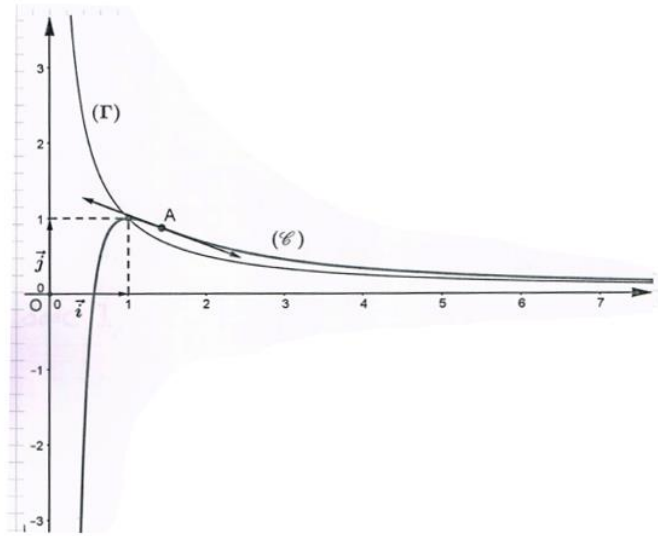


$$a) \forall x \in]0, +\infty[; f(x) - h(x) = \frac{x + \ln x}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$$

Le signe de $f(x) - h(x)$ est celui de $\ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	-		+
Position relative de ζ et Γ	ζ est au dessous de Γ		ζ est au dessus de Γ
	$\zeta \cap \Gamma = \{(1, 1)\}$		

b)



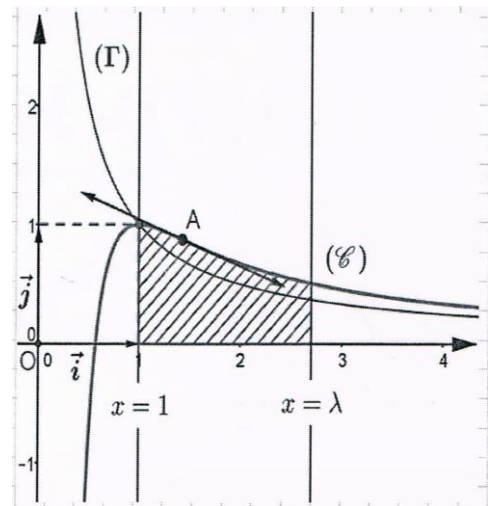
$$5) a) I_\lambda = \int_1^\lambda |f(x) - h(x)| dx \text{ (ua)} = \int_1^\lambda f(x) - h(x) dx$$

$$= \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \ln x \leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$V(x) = -\frac{1}{x} \leftrightarrow V'(x) = \frac{1}{x^2}$$

U, V, U' et V' sont continues sur $[0, \lambda]$



$$\text{Donc } I_\lambda = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^\lambda = \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \left(-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda} (1 + \ln \lambda)$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 1$$