Correction de l'épreuve de mathématiques ($\boldsymbol{bac\ Sciences\ expérimentales}$)

Session de contrôle 2017

<u>Exercice 1 :</u>

De quoi s'agit -il ?

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

1°) a) ⇨ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG} = 3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Ainsi $E(3,3,3)$.

⇨ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG} = 3\vec{i}+3\vec{k}$. Ainsi $D(3,0,3)$.

b) ⇨ $\Omega = C*D$ signifie $\Omega\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right)$ donc $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

2) a) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$.

b) $V_{(OAEG)} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\right).\overrightarrow{AO}\right|$ avec $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\left|-27+0+0\right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

3) a) $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD)

Donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi $P\perp(CD)$.

b) Soit $P' : x - y - z - 3 = 0$

⇨ $3 - 0 + 0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$.

⇨ $3 - 3 + 3 - 3 = 0$ donc $E \in P'$.

⇨ $0 - 0 + 3 - 3 = 0$ donc $G \in P'$.

Or $(AEG) = P = P'$, ainsi $P : x - y + z - 3 = 0$.

Autrement : $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc $P : 9x - 9y + 9z + d = 0$,

Or $A(3,0,3) \in P$ signifie $9\times3-9\times0+\times0+d=0$ signifie $d = -27$

Donc $P : 9x - 9y + 9z - 27 = 0$ signifie $P : x - y + z - 3 = 0$.

4) a) $(S) : x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

signifie $(S) : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = -6+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

signifie $(S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $P: x-y+z-3=0$ donc $d(\Omega,P)=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$d(\Omega,P)=R$. Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de Ω sur P.

Signifie $\begin{cases} H\in P \\ H\in D\left(\Omega,\overrightarrow{n_p}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

signifie $\begin{cases} \frac{3}{2}+\alpha-\frac{3}{2}+\alpha+\frac{3}{2}+\alpha-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ Ainsi $H(2,1,2)$

Exercice 2 :

De quoi s'agit -il ?

- **Racines cubiques d'un nombre complexe donné**
- **Construction de points M(z) sachant $|z|$ et arg(z)**
- **Complexe et géométrie**

A/

1) a) $\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

b) $Z^3=2\sqrt{2}i=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ signifie $Z=2\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$.

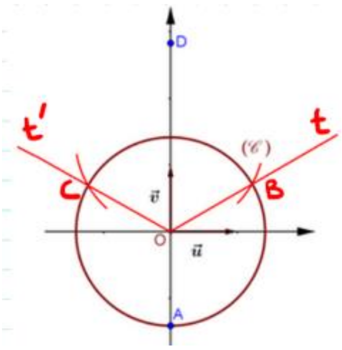
Signifie $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ou $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Ainsi les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$ sont

$Z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$; $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $Z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

2) a) ⇨ $z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B|=\sqrt{2} \\ \arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\in\zeta_{(O,\sqrt{2})} \\ (\vec{u},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

signifie $B\in\zeta\cap[Ot)$ où $(\vec{u},\overrightarrow{Ot})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.



⇨ $z_C=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_C|=\sqrt{2} \\ \arg(z_C)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C\in\zeta_{(O,\sqrt{2})} \\ (\vec{u},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

signifie $C\in\zeta\cap[Ot')$ où $(\vec{u},\overrightarrow{Ot'})\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

b) ⇨ $z_B=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

⇨ $z_C=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Autrement : ⇨ $z_C=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=-\overline{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=-\overline{z_B}$.

$=-\overline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) ⇨ $z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-\sqrt{6}$.

⇨ $z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=3\sqrt{2}\,i$.

Donc $\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=-\sqrt{3}\,i\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AD}$. Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

Autrement : $z_C=-\overline{z_B}$ signifie $S_{(O,\vec{v})}(B)=C$ signifie $(O,\vec{v})\perp(BC)$

Or $(O,\vec{v})=(AD)$, Ainsi $(BC)\perp(AD)$.

d) ⇨ $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\,i=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

⇨ $z_{\overrightarrow{BD}}=z_D-z_B=2\sqrt{2}\,i-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Donc $z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{BD}}$, d'où ABDC est un parallélogramme de plus $(BC)\perp(AD)$;
Ainsi ABDC est un losange.

B/ 1) a) ⇨ $z_N^3=\left(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\alpha^3 e^{i2\pi}=\alpha^3$.

⇨ $z_P^3=\left(\alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^3=\alpha^3 e^{-i2\pi}=\alpha^3$.

b) ⇨ $z_N^3=z_P^3=\alpha^3$.

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul α^3 sont z_N, z_P et z_M
et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a) ⇨ MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et MN = MQ
signifie MNQP est un parallélogramme(car MNP est un triangle équilatéral)

signifie $z_{\overline{MN}} = z_{\overline{PQ}}$ signifie $z_N - z_M = z_Q - z_P$ signifie $z_Q = -z_M + z_P + z_N$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$

signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ signifie $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

signifie $\alpha^3 = -2\alpha$.

b) ⇨ MNQP est un losange signifie $\alpha^3 = -2\alpha$ signifie $\alpha\left(\alpha^2 + 2\right) = 0$

signifie $\alpha^2 + 2 = 0$ car $\alpha \in \mathbb{C}^*$

signifie $\alpha^2 = -2$ signifie $\alpha = i\sqrt{2}$ ou $\alpha = i\sqrt{2}$.

Exercice 3 :

De quoi s'agit -il ?

- **Fonction en logarithme népérien : limites, variations, représentations graphique**
- **Fonction réciproque**
- **Résolution d'équations**

1) **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$ et ln(x+1) > 0 pour tout x > 0 donc $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$.

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote a ($\mathscr{C}$).

b) Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$; $\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$.

c) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

La droite Δ : y = 1 est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

2) **a)** Pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$; $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\ln(x)}{\ln^2(x+1)} \times \dfrac{x(x+1)}{x(x+1)}$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\left(\ln(x+1) - \ln(x)\right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{x\left(\ln(x)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\ln(x)\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$= \frac{x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout $x \in]0,+\infty[$; $1+\dfrac{1}{x} > 1$ et $x+1 > 1$

Donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$ et $\ln(x+1) > 0$

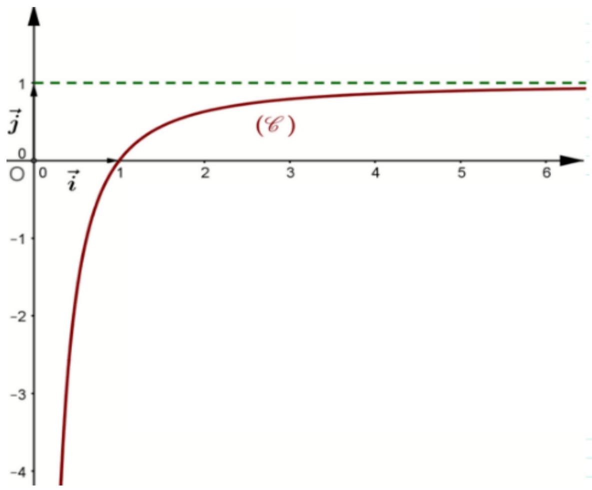
Ainsi $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln(x+1) > 0$ et $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0$.

Donc pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) > 0$ Par suite f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1

d)



3) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =]-\infty,1[$.

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

$\lim\limits_{x\to0}f^{-1}(x)=f^{-1}(0)=1$ car f^{-1} est continue en 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

b) pour tout $n\geq2$; $a_n=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie $f(a_n)=\frac{1}{n}$

signifie $\frac{\ln(a_n)}{\ln(a_n+1)}=\frac{1}{n}$

signifie $n\ln(a_n)=\ln(a_n+1)$

signifie $\ln\left((a_n)^n\right)=\ln(a_n+1)$

signifie $(a_n)^n=a_n+1$.

Ainsi a_n est une solution de l'équation : $x^n = x + 1$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+1)=2$.

Exercice 4 :

De quoi s'agit -il ?

- **Lecture graphique**
- **Détermination d'une fonction solution d'une équation différentielle**
- **Modélisation**

1) **a)** $f(0) = 0$; $f'(0) = \frac{+1}{+2}=\frac{1}{2}$.

b) f est solution de l'équation $y' = ay + b$ donc $f'(x) = a\,f(x) + b$, pour tout réel x.

d'où $f'(0) = a\,f(0) + b$ ainsi ; $b=f'(0)=\frac{1}{2}$.

2) **a)** f solution de l'équation : $y'=ay+\frac{1}{2}$

Donc $f'(x)=a\,f(x)+\frac{1}{2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Signifie $a\,f(x)=f'(x)-\frac{1}{2}$ signifie $f(x)=\frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)$ car $a\neq0$.

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)$.

b) S est l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 4.

Donc $S=\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{a}\left(f'(x)-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{a}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]_0^4$

$$=\frac{1}{a}\left(f(4)-2-\left(f(0)-0\right)\right)=\frac{1}{a}\left(2-2e^{-1}-2\right)=\frac{-2e^{-1}}{a}.$$

c) On a $S=\frac{-2e^{-1}}{a}=8e^{-1}$ signifie $a=\frac{-2e^{-1}}{8e^{-1}}=-0,25$.

3) f solution de l'équation différentielle $y'=-0,25\,y+\frac{1}{2}$

Donc $f(x)=ce^{-0,25x}-\frac{\frac{1}{2}}{-0,25}=ce^{-0,25x}+2$.

Or $f(0)=0$ signifie $c+2=0$ signifie $c=-2$

Ainsi $f(x)=2-2e^{-0,25x}$.

4) **a)** $h(3)=2-2e^{-0,25\times3}=2-2e^{-0,75}\simeq1,05\,\text{m}$.

Donc la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines est à peu près de 1,05m.

b) $h(t)>1,98$ signifie $2-2e^{-0,5t}>1,98$ signifie $2e^{-0,5t}<0,02$ signifie $e^{-0,5t}<0,01$

signifie $-0,5\,t<\ln(0,01)$ signifie $t>-\frac{\ln(0,01)}{0,5}\simeq18,42$.

Ainsi, au cours de la dix-neuvième semaine une plante de maïs dépassera 198 cm.