RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Sciences de l'informatique** Durée : 3h — Coefficient : 3 **Session de contrôle**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison

b) Exprimer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2 (4 points)

La probabilité qu'un autobus parte à temps est 0,85 ; la probabilité qu'il parte à temps et arrive à temps est 0,75 et la probabilité qu'il arrive à temps est 0,78.

Soient P l'événement : "L'autobus part à temps"

et A l'événement : "L'autobus arrive à temps"

1) Déterminer la probabilité de chacun des évènements P, A et $P \cap A$.

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A_1 : « l'autobus arrive à temps sachant qu'il est parti à temps »

b) A_2 : « l'autobus ne parte pas à temps et arrive à temps »

3) Pour se rendre au travail le matin, un ouvrier empreinte l'autobus.

Quelle est la probabilité pour que cet ouvrier arrive en retard au plus une fois pendant les 6 jours de travail de la semaine ?

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$. Soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

b) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$. Préciser le signe de f'

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu

2) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Construire $\mathcal{C}$

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\int_0^n f(t)dt$

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

b) Montrer que pour $t\geq 0,\ 8\text{t}\leq(\text{t}+2)^2$

En déduire que pour $t\geq 0,\ \sqrt{t}\leq\dfrac{t+2}{2\sqrt{2}}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^n (t+2)e^{-t}dt$

b) Montrer alors que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite à 10^{-1} près.

Exercice 4 (6 points)

1) On considère l'équation

$$(E_1) \quad 5x-7y=3, \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

a) Vérifier que $(2\ ,\ 1)$ est une solution de (E_1)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1)

c) Soit $(a\ ,\ b)$ une solution de (E_1). On note d = PGCD $(a\ ,\ b)$, préciser les valeurs possibles de d

d) Pour chaque valeur de d donner un exemple de solution

2) On considère l'équation

$$(E_2) \qquad 5x^2-7y^2=3, \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

a)) Montrer que si x et y sont des multiples de 3, alors le couple (x,y) n' est pas solution de (E_2)

b) Montrer que si le couple (x,y) est une solution de (E_2) alors $2x^2 \equiv y^2[3]$

c) Soit z un entier relatif, compléter les congruences suivantes:

Si $z \equiv 1[3]$ alors $z^2 \equiv\ ..[3]$

Si $z \equiv 2[3]$ alors $z^2 \equiv\ ..[3]$

d) En déduire que l'équation (E_2) n'admet pas de solution.