

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)a) $A(1, 0, 2)$; $B(-2, 1, -1)$ et $C(0, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ d'où les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils déterminent un plan P.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P.

$$P : -x + z + c = 0$$

$$A(1, 0, 2) \in P, \text{ d'où } -1 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1.$$

$$-x + z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - z + 1 = 0.$$

$$P : x - z + 1 = 0.$$

2) $I(1, -1, -1)$ et $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

a) $P : x - z + 1 = 0$. $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}) \in P$, car $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on a } \overrightarrow{IJ} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur \overrightarrow{IJ} est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ qui est normal au plan P, d'où \overrightarrow{IJ} est normal au plan P, donc il est un vecteur directeur de la droite Δ .

\overrightarrow{IJ} est un vecteur directeur de la droite Δ et I appartient à donc J appartient à Δ .

Ainsi la droite Δ coupe le plan P en J.

$$b) IJ = \|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

3)a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow x-1^2 - 1 + y+1^2 - 1 + z+1^2 - 1 - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow x-1^2 + y+1^2 + z+1^2 = 5$

D'où S est la sphère de centre I(1, -1, -1) et de rayon $R = \sqrt{5}$.

$$b) d(I, P) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} < R, \text{ d'où le plan P coupe la sphère S suivant un cercle (C) de}$$

$$\text{rayon } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\sqrt{5}^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part $IJ = \frac{3}{\sqrt{2}} = d(I, P)$, d'où J est le projeté orthogonal du centre I de la sphère S sur le plan P. Par conséquent J est le centre du cercle (C).

Ainsi P coupe la sphère suivant le cercle (C) de centre J et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Pour $\theta \in]0, 2\pi[$ on considère le point $N(1 + \cos\theta, -1 + \sin\theta, -3)$.

$$a) S: x-1^2 + y+1^2 + z+1^2 = 5. N(1 + \cos\theta, -1 + \sin\theta, -3).$$

$$1 + \cos\theta - 1^2 + -1 + \sin\theta + 1^2 + -3 + 1^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 4 = 5.$$

D'où $N \in S$.

$$b) P: x - z + 1 = 0. N(1 + \cos\theta, -1 + \sin\theta, -3).$$

$$1 + \cos\theta + 3 = 4 + \cos\theta \neq 0, \text{ car } -1 \leq \cos\theta \leq 1. \text{ D'où } N \notin P.$$

$$c) \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 - \sin\theta \\ -5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN} = -\cos\theta - 5 = -5 - \cos\theta.$$

d) Soit V le volume du tétraèdre ABCN.

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN}| = \frac{1}{6} |-5 - \cos\theta| = \frac{1}{6} (5 + \cos\theta).$$

Le volume V est minimal lorsque $\cos\theta$ prend est minimal et cela pour $\theta = \pi$.

Exercice 2

$$1) a) (3 - i\sqrt{3})^2 = 3^2 - 2i \times 3\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 9 - 6i\sqrt{3} - 3 = 6 - 6i\sqrt{3}.$$

$$b) (E): z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4 \times (-2 + 2i\sqrt{3})$$

$$= 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 + 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 2i\sqrt{3} - 3 + 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$= 6 - 6i\sqrt{3} = (3 - i\sqrt{3})^2 \quad ; \quad \delta = 3 - i\sqrt{3}$$

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{2} = 2 \quad ; \quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3} - 3 + i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$S_c = 2, -1 + i\sqrt{3}.$$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

a) (C) le cercle de centre O et passant par le point A d'affixe 2.

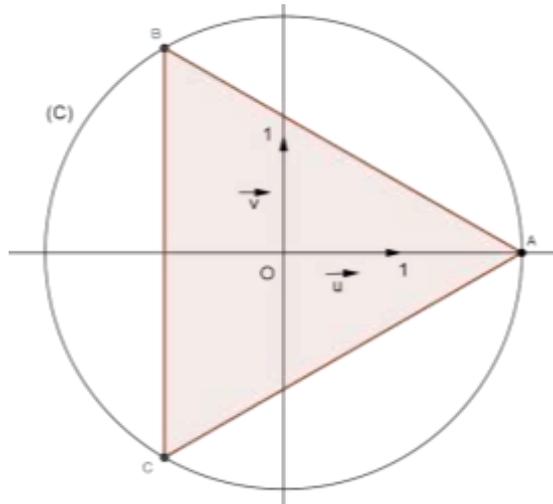
Voir figure.

$$b) b = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$c = \bar{b} = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

c) $OB = |b| = 2$, d'où $B \in (C)$; $OC = |c| = 2$, d'où $C \in (C)$.

d)



$$3)a) b = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad c = \bar{b} = -1 - i\sqrt{3}$$

$$c - b = -2i\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{c - b}{2} = -i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{c - b} = \frac{1}{-i\sqrt{3}} = i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{c}{b - 2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \frac{3 + i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - 3}{-3^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{4i\sqrt{3}}{12} = \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{c}{b - 2} = \frac{2}{c - b} = \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

$$b) \frac{c}{b - 2} = \frac{2}{c - b} = \frac{i\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arg\left(\frac{c}{b - 2}\right) \equiv \arg\left(\frac{2}{c - b}\right) \equiv \arg\left(\frac{i\sqrt{3}}{3}\right) \equiv 2\pi$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{b - 2}\right) \equiv \arg\left(\frac{2}{c - b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv 2\pi$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} \equiv \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA} \equiv \frac{\pi}{2} \equiv 2\pi.$$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} \equiv \frac{\pi}{2} \equiv 2\pi$, d'où O appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC.

$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA} \equiv \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi$, d'où O appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

O est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3

$$f(x) = (x+1)e^{1-x}; x \in \mathbb{R}.$$

$$1)a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{1-x} = -\infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{1-x} = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(-\infty)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e(-xe^{-x}) + e^{1-x} = 0, \text{ car } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, d'où la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptotes au voisinage au voisinage de $(+\infty)$.

$$2)a) f(x) = (x+1)e^{1-x}; x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = (x+1)'e^{1-x} + (x+1)(e^{1-x})' \\ = e^{1-x} - (x+1)e^{1-x} = -xe^{1-x}; x \in \mathbb{R}.$$

$$b) f'(x) = -xe^{1-x}; x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f	$-\infty$	e	0

$$3)a) f'(x) = -xe^{1-x}; x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = -xe^{1-x}' = -e^{1-x} + x e^{1-x} = (x-1)e^{1-x}; x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^{1-x} = 0 \\ \Leftrightarrow x-1 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1$$

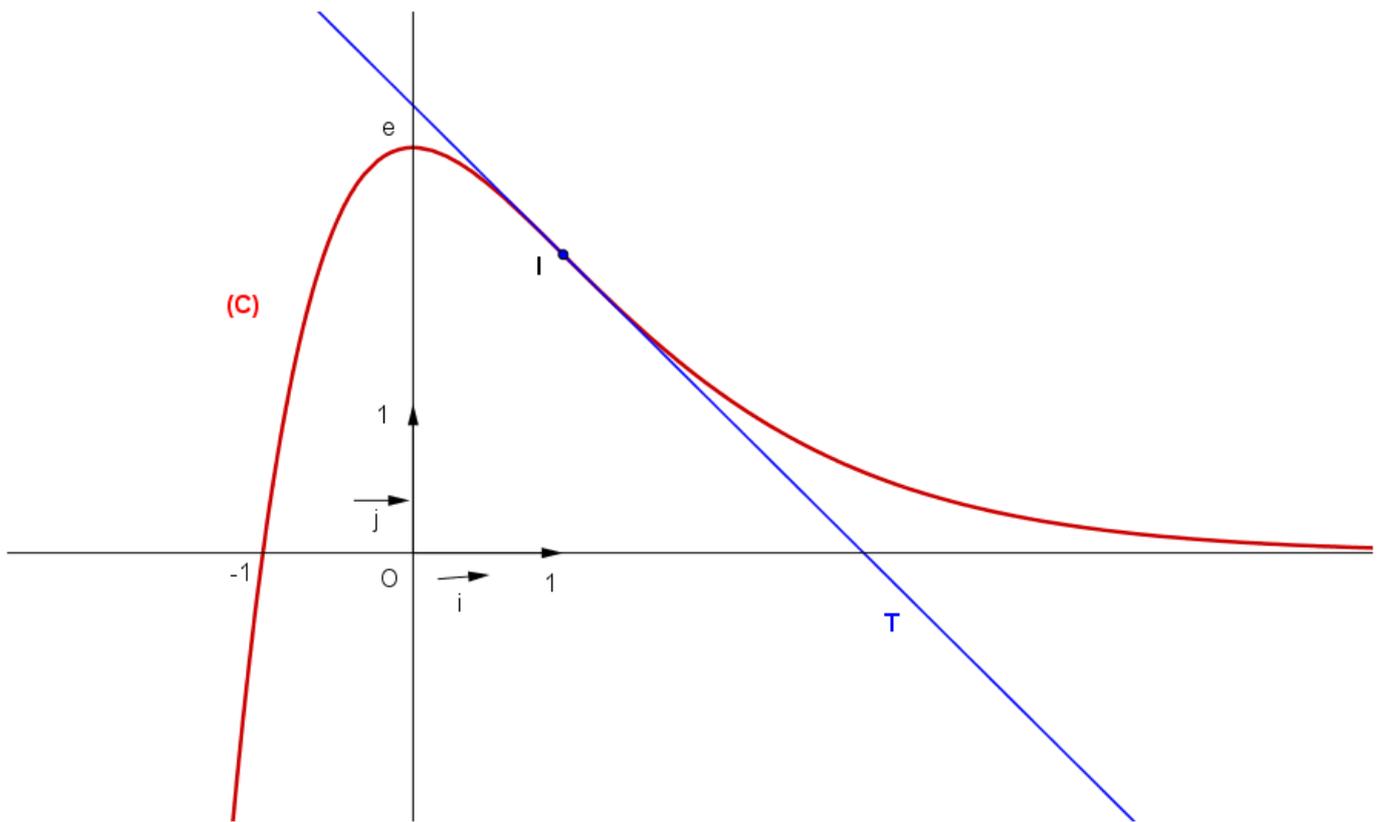
On peut remarquer que le signe de f'' est celui de $x-1$.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe d'où le point $I(1, f(1))$ c'est-à-dire le point $I(1, 2)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) de f.

b) T la tangente à (C) au point I.

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) + 2 = -x + 3.$$

4) La courbe (C).



5) Soit $\alpha > -1$; $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$.

a) $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \alpha$.

b) On a $f(x) = (x+1)e^{1-x}$; $x \in \mathbb{R}$ et $f''(x) = (x-1)e^{1-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f''(x) + 2e^{1-x} = (x-1)e^{1-x} + 2e^{1-x} = (x+1)e^{1-x} = f(x).$$

Ainsi $f(x) = f''(x) + 2e^{1-x}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } I(\alpha) &= \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-1}^{\alpha} f''(x) + 2e^{1-x} dx \\ &= [f'(x) - 2e^{1-x}]_{-1}^{\alpha} = [-xe^{1-x} - 2e^{1-x}]_{-1}^{\alpha} \\ &= [-(x+2)e^{1-x}]_{-1}^{\alpha} = -(\alpha+2)e^{1-\alpha} + e^2. \end{aligned}$$

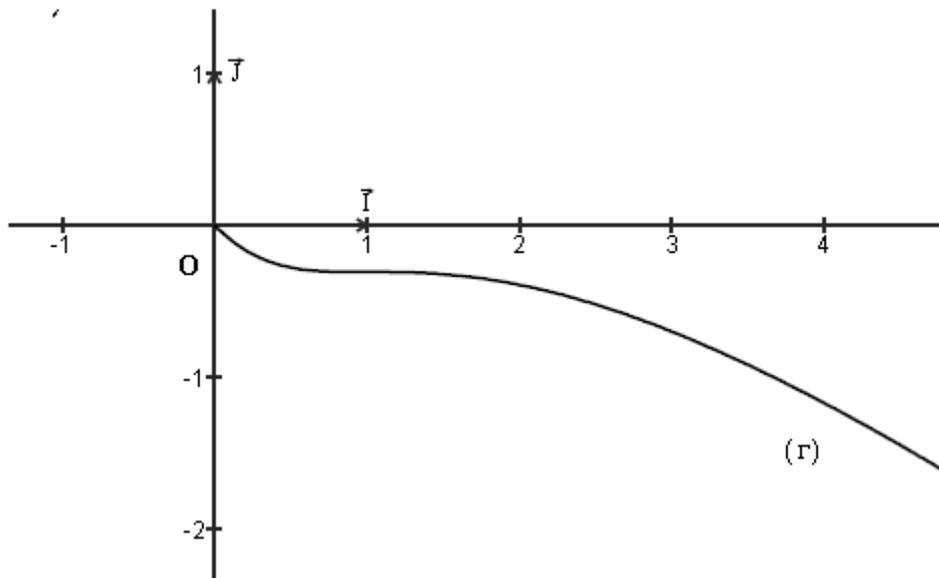
$$\text{Ainsi } I(\alpha) = e^2 - (\alpha+2)e^{1-\alpha}.$$

$$\text{d) } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^2 - (\alpha+2)e^{1-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^2 + e(-\alpha)e^{-\alpha} + 2e^{1-\alpha} = e^2.$$

$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = e^2$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -1$.

Exercice 4

1) La courbe (Γ) est celle de la fonction f définie sur $0, +\infty$ par $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$.



On peut remarquer que la courbe de f est au-dessous de l'axe des abscisses, donc $f(x) \leq 0$, pour tout $x \in 0, +\infty \Rightarrow -x + \ln(1+x^2) \leq 0$, pour tout $x \in 0, +\infty$
 $\Rightarrow \ln(1+x^2) \leq x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$2) (U_n) : \begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1+U_n^2), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrons que $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence :

- $U_0 = \frac{3}{2} > 0$, d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n , c'est-à-dire $U_n > 0$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} U_n > 0 &\Rightarrow 1 + U_n^2 > 1 \\ &\Rightarrow \ln(1 + U_n^2) > \ln(1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + U_n^2) > 0 \\ &\Rightarrow U_{n+1} > 0. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a d'après la question 1) $\ln(1+x^2) \leq x$, pour tout $x \in 0, +\infty$.

D'autre part $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $\ln(1+U_n^2) \leq U_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(1+U_n^2) \leq U_n \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+U_n^2) \leq \frac{1}{2}U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$$

Ainsi $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$U_1 \leq \frac{1}{2}U_0$$

$$U_2 \leq \frac{1}{2}U_1$$

$$\otimes \cdot \quad \cdot$$

Par itération, multiplication et simplification.

$$U_{n-1} \leq \frac{1}{2}U_{n-2}$$

$$U_n \leq \frac{1}{2}U_{n-1}$$

$$U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0$$

On peut remarquer que cela est possible puisque tous les termes sont strictement positifs.

D'où on a $U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) D'après ce qui précède on a $0 < U_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

3) (S_n) la suite définie par $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $S_{n+1} - S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n + U_{n+1} - U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_{n+1} > 0.$

D'où $S_{n+1} > S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite (S_n) est croissante.

b) On a $U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$U_0 \leq \frac{3}{2}$$

$$U_1 \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\oplus \quad \cdot \quad \cdot$$

Par itération et addition

$$U_{n-1} \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n \leq \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$\text{D'autre part on a } 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } S_n &\leq \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \\ &\leq \frac{3}{2} \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{c) On a } S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \text{ Or } 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 3, \text{ d'où } S_n \leq 3 ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi la suite (S_n) est majorée par 3.

La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge.