

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

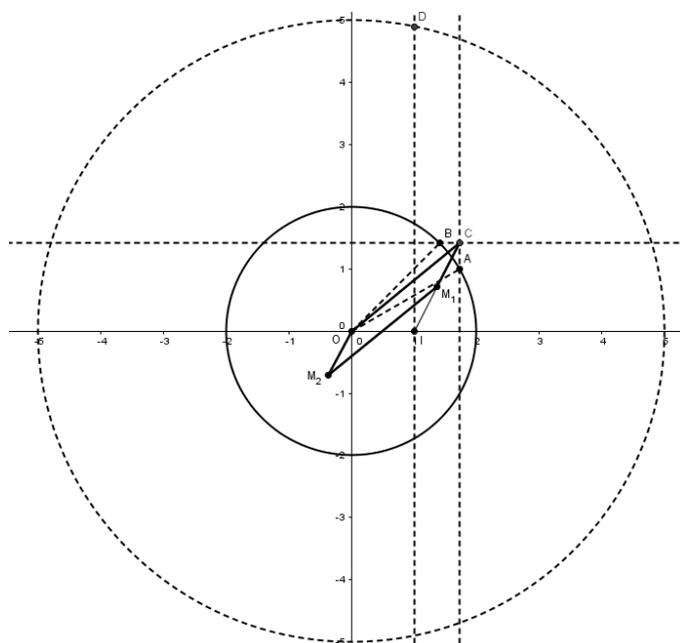
Session principale 2016

Exercice 1

- 1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $-5 \neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.
- 2) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$. Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.
- b) $d(I, P) = \sqrt{3} < R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle \mathcal{C} de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$
- et puisque $J \in P$ et $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de \mathcal{C} .
- c) $d(I, Q) = 3\sqrt{3} > R$, on en déduit que $S \cap Q = \emptyset$.
- 3) a) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- b) Soit $M(x, y, z)$.
- $\vec{AM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$, $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM} = 2x + 2y - 2z + 2 = 2(x + y - z + 1)$.
- 4) $\begin{cases} M \in S \\ V_{(ABCM)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM}| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \frac{1}{6} |2(x + y - z + 1)| = 2 \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ x + y - z - 5 = 0 \text{ ou } x + y - z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (S \cap P) \cup (S \cap Q) \Leftrightarrow M \in S \cap P = \mathcal{C}$.

Exercice 2

- 1) a) Voir figure.
- b) $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
- 2) a) $\begin{cases} \operatorname{Re}(c) = \operatorname{Re}(a) \\ \operatorname{Im}(c) = \operatorname{Im}(b) \end{cases}$,
on en déduit que $c = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$.
- b) $c^2 = (\sqrt{3} + i\sqrt{2})^2 = 3 - 2 + 2\sqrt{6}i = 1 + 2i\sqrt{6}$.
- 3) a) $OD = |c^2| = \sqrt{1 + 24} = 5$.
- b) D'une part $OD = 5$ donc D appartient au cercle de centre D et de rayon 5, d'autre part



$\operatorname{Re}(c^2) = 1$ donc D appartient à la droite d'équation $x = 1$ d'où la construction de D.

(En tenant compte de $\operatorname{Im}(c^2) > 0$)

4) $\Delta = 4 + 8i\sqrt{6} = 4c^2$. Soit $\delta = 2c$.

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3} + i\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 - \sqrt{3} - i\sqrt{2}}{2}.$$

5) a) $z_1 = \frac{1+c}{2}$, il en résulte que M_1 est le milieu de $[IC]$.

b) $c = z_1 - z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{M_2M_1}$. On en déduit que OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Voir figure.

Exercice 3

A.

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}(2x \ln x - x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2 \ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$.

b) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x^2} = -1$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln x + \frac{1}{x} = +\infty$, il en résulte que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y = x$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) = -\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right)^2 = -\left(\frac{x-1}{x} \right)^2.$$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ de plus

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

| | | | |
|---------|---|-----------|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | - |
| $f(x)$ | | $+\infty$ | $-\infty$ |

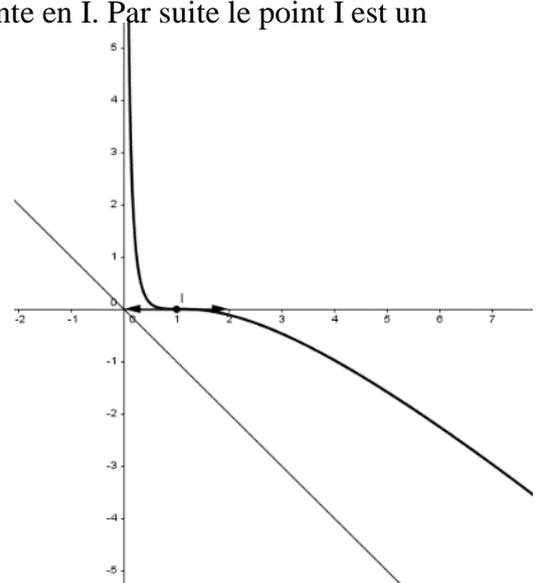
c) $f(1) = 0$.

| | | | |
|--------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | | + | - |

d) $f'(1) = 0$ donc \mathcal{C} admet au point $I(1, 0)$ une tangente horizontale de plus la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, il en résulte que \mathcal{C} traverse sa tangente en I. Par suite le point I est un point d'inflexion de \mathcal{C} .

3) a) Voir figure.

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \int_1^e |f(x)| dx = -\int_1^e f(x) dx = -\left[2(x \ln x - x) - \frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^e \\ &= \frac{e^2 - 7}{2} \text{ (ua).} \end{aligned}$$



$$4) \text{ a) } f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = 2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) - \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

b) Puisque pour tout $x > 0$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} > 1$ et f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, il en résulte que

$$f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \leq 0 \text{ ou encore } \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

B.

$$1) u_3 = \sum_{k=1}^3 \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln^2 2 + \ln^2\left(\frac{3}{2}\right) + \ln^2\left(\frac{4}{3}\right) = 0,726.$$

2) a) $u_{n+1} - u_n = \ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 0$ car $\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 1$ par suite la suite (u_n) est croissante.

$$\text{b) } \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$\text{c) On a } \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ alors } \sum_{k=1}^n \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Il en résulte que } u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

d) On a $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 alors la suite (u_n) est convergente vers un réel L .

$$\text{Pour } n \geq 3, u_3 \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \text{ alors } 0,7 < 0,726 \leq L \leq 1..$$

Exercice 4

$$1) \text{ a) } r = -0,97.$$

$$\text{b) } D : y = -2,64x + 34,66.$$

$$\text{c) Pour } x = 10, \text{ on obtient } y = -2,64 \cdot 10 + 34,66 = 8,26.$$

$$2) \text{ a) } Z = \ln y = -0,11x + 3,57 \Leftrightarrow y = e^{-0,11x+3,57} \Leftrightarrow y = e^{3,57} e^{-0,11x} \Leftrightarrow y = 35,52 e^{-0,11x}.$$

$$\text{b) Pour } x=10, \text{ on obtient } y = 35,52 \cdot e^{-1,1} \approx 11,82.$$

3) L'allure du nuage est proche de l'allure de (C) et n'a pas l'allure d'une droite alors le deuxième ajustement est plus adapté.