Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session principale 2016

Exercice 1

1) a) $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On sait que $f(B) = F$ et $(GF) \perp (BC)$ car (GF) est la médiatrice de [BC], on en déduit que l'image de (BC) est (GF).

c) Puisque $f(A) = A$ et $(AB) \perp (AC)$ donc l'image de (AC) est (AB).

$C \in (BC) \cap (AC)$ donc $f(C) \in f((BC)) \cap f((AC))$ donc $f(C) \in (GF) \cap (AB) = \{E\}$.

Il en résulte que $f(C) = E$.

2) a) Le cercle ζ_1 est de diamètre [BC] donc son image par f est le cercle de diamètre $\left[f(B)f(C)\right]$,

or $f(B) = F$ et $f(C) = E$, il en résulte que l'image de ζ_1 par f est le cercle de diamètre [EF].

Ainsi $f(\zeta_1) = \zeta_2$.

b) (Voir figure)

c) Les points I et H appartiennent au cercle ζ_2 de diamètre [EF] privé de E et F donc

$EIF = EHF = \frac{\pi}{2}$, de plus les points A et F sont deux points de l'arc orienté $IH \setminus \{I, H\}$ situé sur ζ_2

donc $\left(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Ainsi le quadrilatère HEIF admet trois angles droits donc c'est un rectangle.

d) $F \in (AF) \cap (HF)$ donc $f(F) \in f((AF)) \cap f((HF))$ donc $(AE) \cap (IF) = \{I\}$.

Il en résulte que $f(F) = I$.

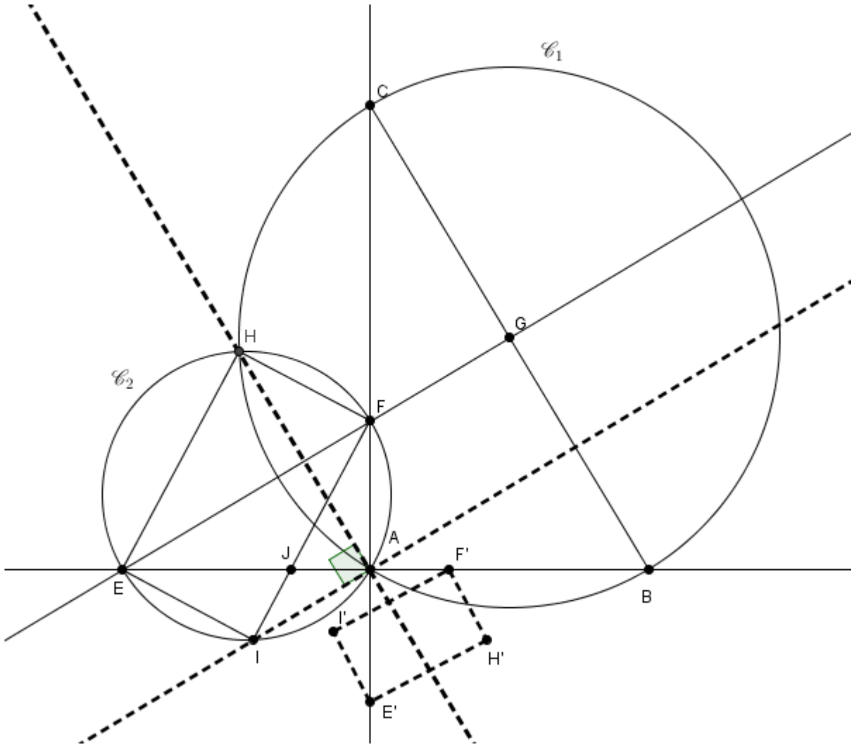
3) a) $S_{(AC)} \circ f$ est la composée d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte

de plus $\begin{cases} S_{(AC)} \circ f(A) = A = g(A) \\ S_{(AC)} \circ f(B) = F = g(B) \\ A \neq B \end{cases}$, on en déduit que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b) Le point $E \in (AB)$ donc

$E' = g(E) \in g((AB)) = (AF) = (AC)$.

c) Voir figure.



Exercice 2

1) a) $\Delta = (1+2i)^2 m^2 + 4(1-i)m^2 = m^2$. Soit $\delta = m$.

$$z_1 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = im \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = m(1+i).$$

b) ($z_1 z_2$ est un réel strictement positif) $\Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1 z_2) \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in]0,\pi[\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \theta \in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta \in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right).$$

2) $z_1 z_2 = m^2 i(1+i) = |m|^2 e^{i\frac{5\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = |m|^2 \sqrt{2} e^{i2\pi} = |m|^2 \sqrt{2}.$

3) a) Le point $E \in \mathscr{C} \setminus \{B, C\}$ donc le triangle BEC est rectangle en E et les triangles OCE et OEB sont rectangles en O.

$\frac{OC}{OE} = \tan\left(\widehat{OEC}\right) = \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{OEC}\right) = \cot an\left(\widehat{BEO}\right) = \frac{OE}{OB}$, il en résulte que

$\frac{OC}{OE} = \frac{OE}{OB} \Leftrightarrow OE^2 = OC.OB.$

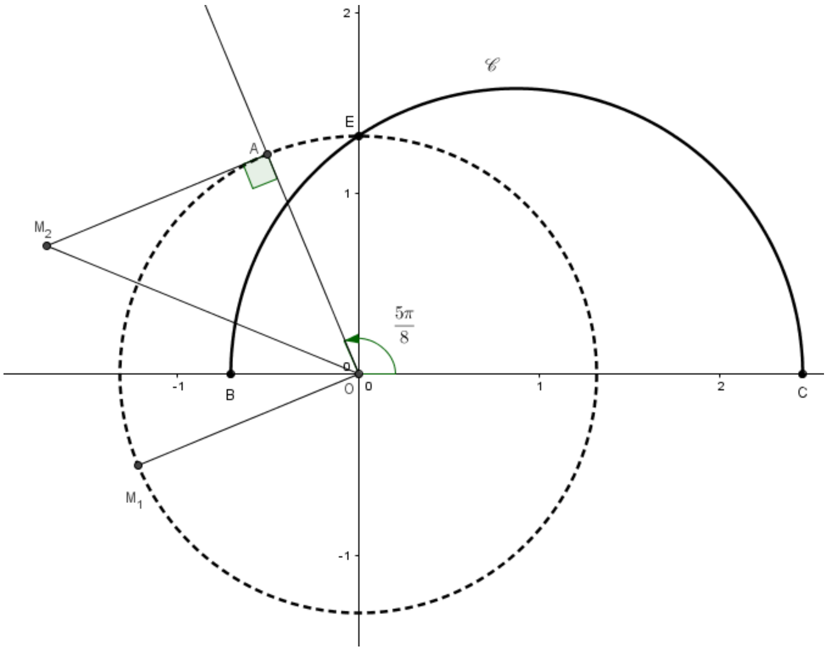
b) D'une part $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$ donc $|m| = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}$, d'autre part $OE^2 = OC.OB = t\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $OE = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}$.

Il en résulte que $|m| = OE$.

4) a) Voir figure.

a) On a $z_2 = m(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} m$, il en résulte que M_2 est l'image de A par la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$z_1 = im = e^{i\frac{\pi}{2}} m$, il en résulte que M_1 est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Exercice 3

1) On a $\begin{cases} a \equiv 1\left(\text{mod } 2^4\right) \\ a \equiv 1\left(\text{mod } 5^4\right) \end{cases}$ donc $\begin{cases} a-1 \equiv 0\left(\text{mod } 2^4\right) \\ a-1 \equiv 0\left(\text{mod } 5^4\right) \\ 2^4 \wedge 5^4 = 1 \end{cases}$, on en déduit que $a-1 \equiv 0\left(\text{mod } 2^4 \times 5^4\right)$ ou encore

$a \equiv 1\left(\text{mod} 10^4\right)$.

2) $9217 \equiv 2(\text{mod} 5)$ donc $b = (9217)^4 \equiv 2^4 (\text{mod} 5) \equiv 1(\text{mod} 5)$.

$9217 \equiv 1\left(\text{mod } 2^4\right)$ donc $b = (9217)^4 \equiv 1\left(\text{mod } 2^4\right)$.

3) a) Pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b^{5^{n+1}} - 1 = \left(b^{5^n}\right)^5 - 1 = \left(b^{5^n} - 1 + 1\right)^5 - 1 = \left(b_n + 1\right)^5 - 1$.

b) En utilisant la formule du binôme,

$b_{n+1} = \left(b_n + 1\right)^5 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$.

4) a) Si 5^{n+1} divise b_n alors il existe un entier k tel que $b_n = 5^{n+1}k$, il en résulte que

$b_n^5 = \left(5^{n+1}k\right)^5 = 5^{5n+5}k^5 = 5^{n+2}\left(5^{4n+3}k^5\right)$ ce qui prouve que 5^{n+2} divise b_n^5.

b) Vérification pour n = 0. $b_0 = b - 1 \equiv 0(\text{mod} 5)$ Vrai (D'après 2)

Soit n un entier naturel. Supposons que $b_n \equiv 0\left(\text{mod} 5^{n+1}\right)$ et montrons que $b_{n+1} \equiv 0\left(\text{mod} 5^{n+2}\right)$.

Puisque $b_n \equiv 0\left(\text{mod} 5^{n+1}\right)$ c'est-à-dire 5^{n+1} divise b_n donc 5^{n+2} divise b_n^5, $5b_n^4$, $10b_n^3$, $10b_n^2$ et $5b_n$, il en résulte que 5^{n+2} divise $b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n = b_{n+1}$. D'où le résultat.

5) a) D'après 4)b) et pour $n = 3$, $b_3 = b^{125} - 1 = 9217^{500} - 1 \equiv 0\left(\text{mod} 5^4\right)$ donc $(9217)^{500} \equiv 1(\text{mod} 625)$.

b) D'après 2) $b = (9217)^4 \equiv 1\left(\text{mod } 2^4\right)$ donc $b^{125} = (9217)^{500} \equiv 1(\text{mod} 16)$.

Ainsi $(9217)^{500} \equiv 1(\text{mod} 16)$ et $(9217)^{500} \equiv 1(\text{mod} 625)$ d'après 1) $(9217)^{500} \equiv 1(\text{mod} 10000)$.

c) on sait que $(9217)^{500} \equiv 1(\text{mod} 10000)$ donc $(9217)^{501} \equiv 9217(\text{mod} 10000)$, il en résulte que $\left((9217)^{167}\right)^3 \equiv 9217(\text{mod} 10000)$ ou encore le cube du nombre $(9217)^{167}$ est congru à 9217 modulo 10000.

Exercice 4

A.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote à (C_f).

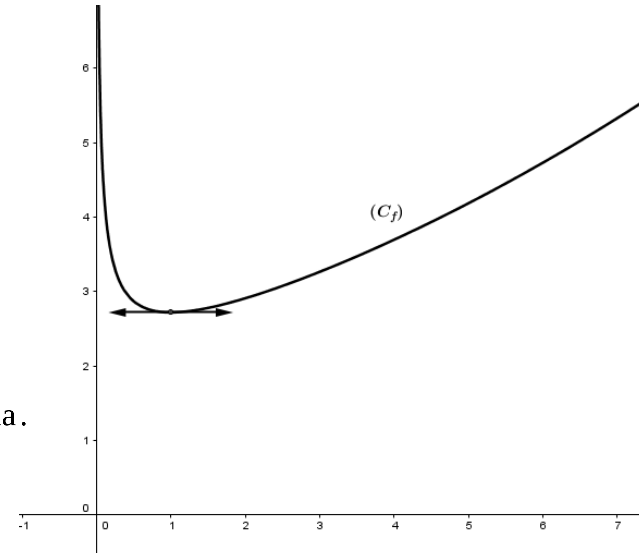
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^3} = +\infty$. (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O, \vec{j})$ en $+\infty$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty \searrow$	e	$\nearrow +\infty$	

c) Voir figure.



3) $S_\lambda = \int_\lambda^1 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_\lambda^1 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_\lambda^1 = 2\left(e - e^{\lambda}\right)$ ua.

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} 2\left(e - e^{\lambda}\right) = 2(e-1)$.

B. .

1) La fonction g_1 est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$ donc elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $g_1(]0,1]) = [e,+\infty[$.

La fonction g_2 est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g_2([1,+\infty[) = [e,+\infty[$.

2) a) La fonction g_1 est une bijection de $]0,1]$ sur $[e,+\infty[$. $e + \dfrac{1}{n} \in [e,+\infty[$ donc l'équation $g_1(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0,1]$, or $g_1(1) = e \neq e + \dfrac{1}{n}$ il en résulte que $\alpha_n \in]0,1[$.

La fonction g_2 est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$. $e + \dfrac{1}{n} \in [e,+\infty[$ donc l'équation $g_2(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique $\beta_n \in [1,+\infty[$, or $g_2(1) = e \neq e + \dfrac{1}{n}$ il en résulte que $\beta_n \in]1,+\infty[$.

<u>Conclusion</u> : L'équation $f(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

b) On sait que $g_1(\alpha_n) = e + \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_1^{-1}\left(e + \dfrac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e + \dfrac{1}{n} = e \\ \lim\limits_{x\to e} g_1^{-1}(x) = 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

De même on sait que $g_2(\beta_n)=e+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_2^{-1}\left(e+\frac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} e+\frac{1}{n}=e \\ \lim\limits_{x\to e} g_2^{-1}(x)=1\end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n = 1$.

3) a) $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\,f(x)-\left(e+\frac{1}{n}\right)\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\sqrt{x}}-\left(e+\frac{1}{n}\right)\sqrt{x}=1=h(0)$ donc h est continue à droite en 0.

b) Pour tout $x\in[0,+\infty[, h(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $f(x)=e+\frac{1}{n} \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\alpha_n$ ou $x=\beta_n$.

x	0		α_n		β_n		$+\infty$
$h(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) a) La fonction $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $0\in[0,+\infty[$ donc la fonction u est la primitive de la fonction $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ qui s'annule en 0, il en résulte que u est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Les fonctions $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ et $x\mapsto\sqrt{x}-1$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et dérivables sur $]0,+\infty[$, il en résulte que la fonction v est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $u'(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $v'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}$.

Il en résulte que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $u'(x)=v'(x)$ par suite pour tout $x\in]0,+\infty[$, $u(x)=v(x)+c$ où c est un réel, or les fonctions u et v sont continues sur $[0,+\infty[$ donc $u(x)=v(x)+c$ pour tout $x\in[0,+\infty[$ et comme $u(0)=v(0)=0$ donc c = 0.

Ainsi $u(x)=v(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

c) Pour tout $x\in[0,+\infty[, h(x)=\begin{cases}\sqrt{x}f(x)-\sqrt{x}\left(e+\frac{1}{n}\right) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}=\begin{cases}e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\left(e+\frac{1}{n}\right) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$,

on en déduit que pour tout $x\in[0,+\infty[, h(x)=e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\left(e+\frac{1}{n}\right)$ par suite pour tout $x\in[0,+\infty[$,

$$H(x)=\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt-\left(e+\frac{1}{n}\right)\int_0^x\sqrt{t}dt=2+2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)\left[t\sqrt{t}\right]_0^x$$
$$=2+2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)x\sqrt{x}.$$

5) $A_n=\int_0^{\beta_n}|h(x)|dx=\int_0^{\alpha_n}h(x)dx+\int_{\beta_n}^{\alpha_n}h(x)dx=2H(\alpha_n)-H(\beta_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2H(\alpha_n)-H(\beta_n)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}2+4\left(\sqrt{\alpha_n}-1\right)e^{\sqrt{\alpha_n}}-\frac{4}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\sqrt{\alpha_n}-2\left(\sqrt{\beta_n}-1\right)e^{\sqrt{\alpha_n}}+\frac{2}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)\beta_n\sqrt{\beta_n}=2-\frac{2}{3}e$.