RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Mathématiques**	
	Durée : **4 h**	Coefficient : **4**
SESSION **2016**	**Session principale**	

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que $AB < AC$.

La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).

c) Déterminer $f(C)$.

2) Le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[EF]$ se coupent en A et H.

a) Montrer que $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) Soit $I = f(H)$. Construire le point I.

c) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

d) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F) = J$.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que $g(B) = F$.

a) Montrer que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b) Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).

c) Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.

Exercice 2 **(3 points)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)m\,z - (1-i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0,\pi[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) si et seulement si $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1z_2 = |m|^2\sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2, images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] avec l'axe $(0,\vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB.OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m.

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

(On convient que $|z_1| < |z_2|$).

Exercice 3 **(4 points)**

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$. Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$.

2) Soit $b = (9217)^4$. Montrer que $b \equiv 1 \pmod 5$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^5 + 5\,b_n^4 + 10\,b_n^3 + 10\,b_n^2 + 5\,b_n$.

4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$.

5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

Exercice 4 **(8 points)**

A) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2\,x\,\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit λ un réel de $]0,1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S_\lambda$.

B) 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur l'intervalle I.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n, deux suites réelles (α_n) et (β_n).

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3) On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\left(f(x)-(e+\frac{1}{n})\right) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}}dt$ et $v : x \mapsto 2+2\left(\sqrt{x}-1\right) e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0,+\infty[$

et dérivables sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x) = v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = \beta_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve : Mathématiques (Section : Mathématiques) **Session principale**

Annexe (à rendre avec la copie)

Figure 1

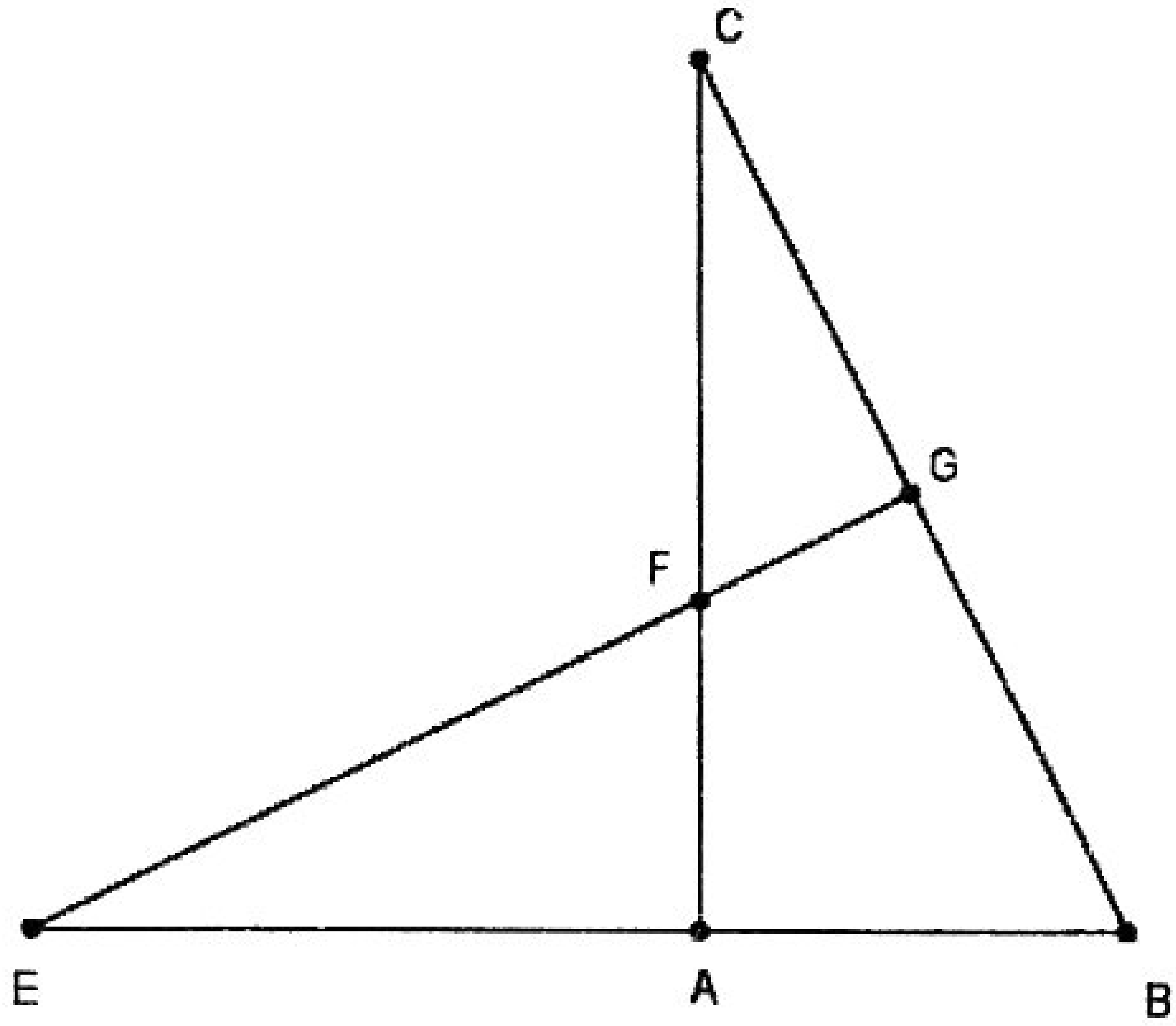

Figure 2