

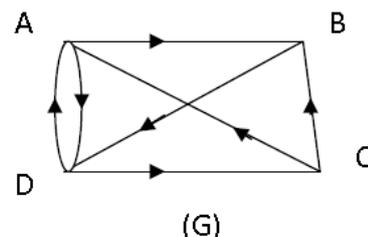
Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)

	A	B	C	D
d^+	2	1	2	2
d^-	2	2	1	2



2)a) Le graphe (G) admet une chaîne orientée eulérienne (vrai)

Dans le graphe (G), on a $d^+(A) = d^-(A)$ et $d^+(D) = d^-(D)$ et pour les sommets B et C seulement on a $d^+(B) = d^-(B) - 1$ et $d^+(C) = d^-(C) + 1$, d'où le graphe (G) admet une chaîne orientée eulérienne.

b) Le graphe (G) admet un cycle orienté eulérien (faux)

Dans le graphe (G) il y a des sommets tels que $d^+ \neq d^-$ (les sommets B et C), donc (G) n'admet pas de cycle orienté eulérien.

c) La matrice associée au graphe (G) en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique

est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (faux)

On a $d^+(A)$ est la somme des termes de la première ligne de la matrice associée au graphe (G). On a $d^+(A) = 2$ et la somme des termes de la première ligne de cette matrice est 3, ainsi cette matrice n'est pas celle associée au graphe (G).

Exercice 2

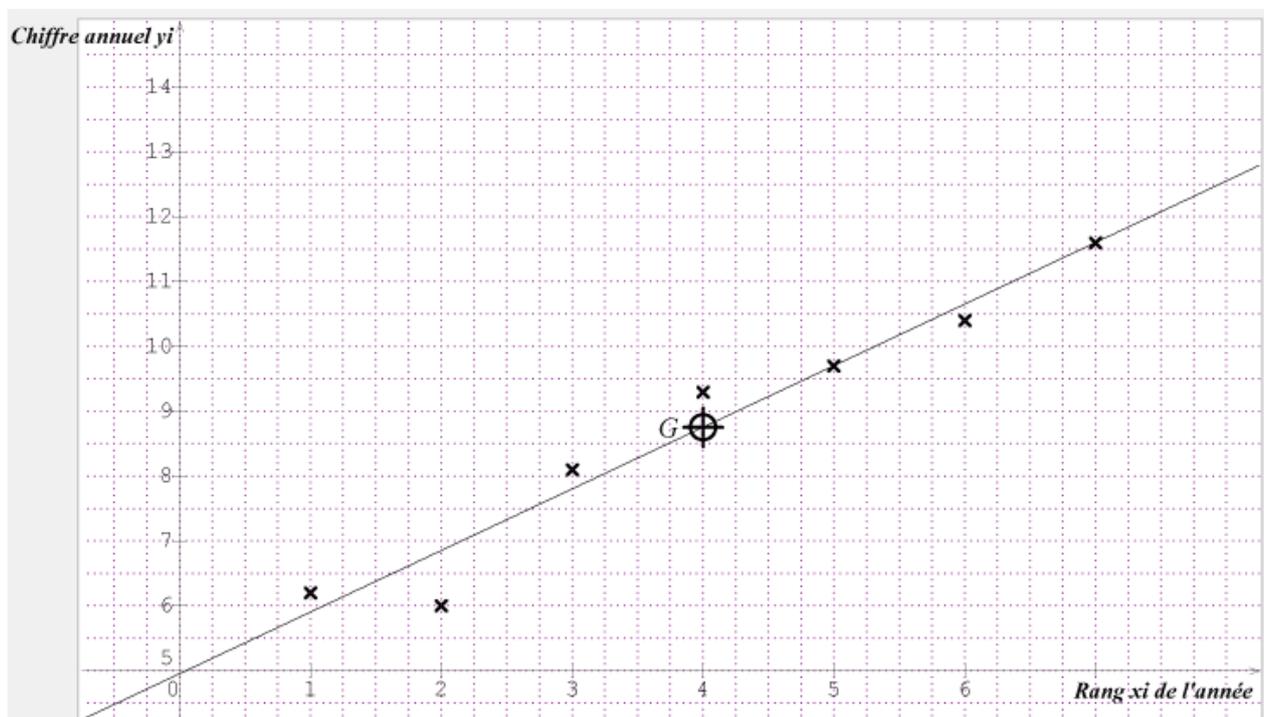
Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre annuel y_i (en milliards de dinars)	6,2	6	8,1	9,3	9,7	10,4	11,6

(Source : I N S)

1) Le nuage de points : Voir figure.

2) $G(\bar{x}, \bar{y})$; où \bar{x} et \bar{y} sont respectivement les moyennes arithmétiques des x_i et y_i .

$G(4 ; 8,76)$.



3) Le nuage des points est allongé suivant une droite, donc un ajustement affine est envisagé.

4)a) Une équation de la droite de régression de y en x : $y = 0,95 x + 4,96$.

b) Le rang de l'année 2017 est $x = 10$, d'où $y = 0,95 \times 10 + 4,96 = 14,46$.

Ainsi le chiffre d'exportation de la Tunisie des produits électriques et mécaniques en l'année 2017 est estimé à 14,46 milliards de dinars.

Exercice 3

1)a) $A = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 25 \times (3 - 2) - 4 \times (12 - 8) + (12 \times 2 - 3 \times 8) \\ &= 25 - 16 + 0 = 9. \end{aligned}$$

b) $\det(A) \neq 0$, d'où A est inversible.

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 17 & -18 \\ 1 & -13 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 17 & -18 \\ 1 & -13 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9 \cdot I_3$$

$$A \times B = 9 \cdot I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{9} \cdot B \right) = I_3 \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot B$$

3)a) On note :

- x le nombre de jouets fabriqués de type voiture ;
- y le nombre de jouets fabriqués de type camion ;
- z le nombre de jouets fabriqués de type bateau.

Le nombre de jouets fabriqués est $x + y + z = 76$.

Le nombre d'heures de travail est $4x + 3y + 2z = 204$.

La quantité utilisée de bois (en Kg) est $2,5x + 1,2y + 0,8z = 96$.

Ainsi la situation est traduite par le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2,5x + 1,2y + 0,8z = 96 \\ 4x + 3y + 2z = 204 \\ x + y + z = 76 \end{cases}$$

$$b) (S) : \begin{cases} 2,5x + 1,2y + 0,8z = 96 \\ 4x + 3y + 2z = 204 \\ x + y + z = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 12y + 8z = 960 \\ 4x + 3y + 2z = 204 \\ x + y + z = 76 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 204 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \times U = V$$

$$c) A \times U = V \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9} \cdot B \right) A \times U = \left(\frac{1}{9} \cdot B \right) \times V$$

$$\Leftrightarrow U = \left(\frac{1}{9} \cdot B \right) \times V$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 17 & -18 \\ 1 & -13 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 960 \\ 204 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 180 \\ 360 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'artisan a fabriqué 16 voitures, 20 camions et 40 bateaux.

Exercice 4

$$f(x) = x - 1 - \ln x ; x \in 0, +\infty .$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 - \ln x = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

D'où la droite d'équation $x = 0$ est asymptote oblique pour la courbe (C).

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 - \ln x = -\infty.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$, d'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

$$3)a) f(x) = x - 1 - \ln x ; x \in 0, +\infty . f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} ; x \in 0, +\infty .$$

$$b) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 ; x \in 0, +\infty$$

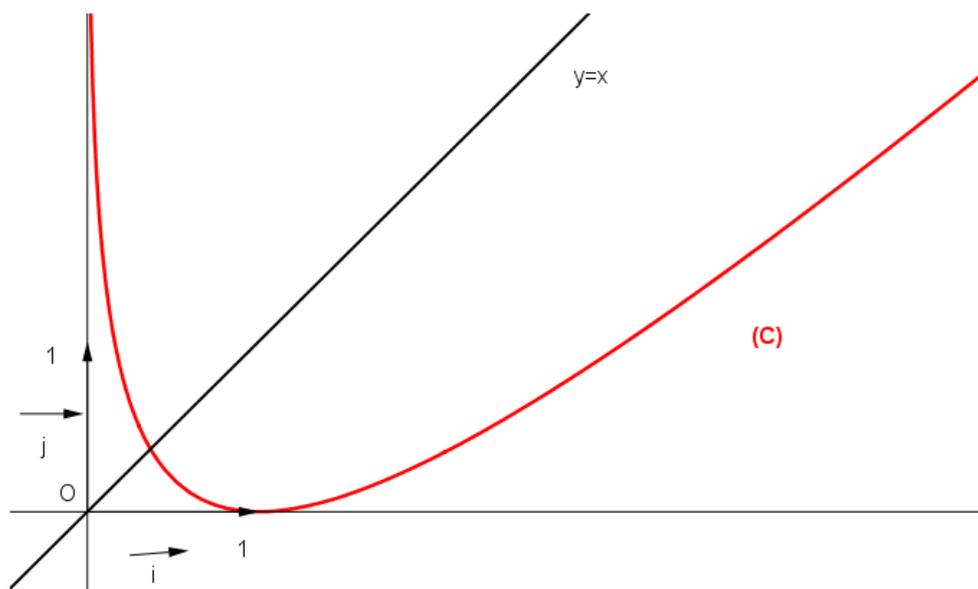
$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = 0.$$

Le tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

4) La courbe (C) de f :



5) $g(x) = x \ln x$; $x \in 0, +\infty$.

a) $g'(x) = x \ln x' = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x$; $x \in 0, +\infty$.

b) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x - 1 - \ln x dx = \int_1^e x - g'(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - g(x) \right]_1^e \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 - g(e) \right) - \left(\frac{1}{2} - g(1) \right) = \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$