

Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie

**Exercice 1 (4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

Soit OADBCEFG le cube tel que  $\vec{OA} = \vec{u}$ ,  $\vec{OB} = \vec{v}$  et  $\vec{OC} = \vec{w}$ .

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].

1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que  $\vec{OI} \wedge \vec{OJ} = \frac{1}{4}(\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w})$ .

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

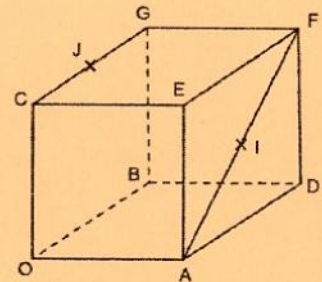
b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les coordonnées de H, justifier que  $EH = \frac{\sqrt{21}}{7}$ .

3) Soit (S) l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \frac{11}{7} = 0$ .

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).



**Exercice 2 (5 points)**

Dans la figure 1 de l'annexe jointe,  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$  et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{OA})$ .

a) Donner, en fonction de  $\theta$ , l'écriture exponentielle des nombres complexes a,  $\bar{a}$ ,  $a^2$  et  $\bar{a}^2$ .

b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives  $\bar{a}$ ,  $a^2$  et  $\bar{a}^2$ .

2) a) Justifier que  $a + \bar{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

b) Montrer que a et  $\bar{a}$  sont les solutions de l'équation (E):  $z^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$ .

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ ,

$$z^5 - 1 = (z-1) \left[ z^2 - \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) z + 1 \right] \left[ z^2 + \left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) z + 1 \right].$$

b) En déduire que  $a$  est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que  $e^{\frac{2i\pi}{5}}$  est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que  $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

5) Soit  $I$  le point d'affixe 1.

Montrer que les points  $I, A, C, D$  et  $B$  sont les sommets d'un pentagone régulier.

### Exercice 3 (4,5 points)

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :

Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.

- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.

- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit  $A_n$  l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au  $n^{\text{ième}}$  choix » et  $p_n$  sa probabilité.

a) Justifier que  $n \leq 4$ .

b) Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .

c) Montrer que  $p_3 = \frac{7}{120}$  et que  $p_4 = \frac{1}{120}$ .

2) Soit  $X$  la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

a) Soit  $T$  un réel positif, on note  $p(Y \leq T)$  la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à  $T$  années. Exprimer  $p(Y \leq T)$  en fonction de  $\lambda$  et  $T$ .

b) Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\lambda$  si l'on sait que  $p(Y \geq 5) = 0,7$ .

c) On prend  $\lambda = 0,071$ .

Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

#### Exercice 4 (6,5 points)

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 e^x$ .
- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
  - Comparer  $x$  et  $\frac{1}{x}$  dans chacun des cas suivants :  $x \in ]0, 1[$  et  $x \in ]1, +\infty[$ .
  - En déduire que si  $x \in ]0, 1[$  alors  $g(x) < g(\frac{1}{x})$  et que si  $x \in ]1, +\infty[$  alors  $g(x) > g(\frac{1}{x})$ .
- 2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}}$  et on désigne par  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})$ .
- Calculer  $f'(1)$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe on a représenté, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $(\mathcal{C}_h)$  de la fonction  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$ .
- Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  est au-dessus de  $(\mathcal{C}_h)$ .
  - Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
- 5) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $\int_1^x (f(t) - h(t)) dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$ .
- Soit  $\alpha \in ]0, 1]$ .  
Exprimer en fonction de  $\alpha$ , l'aire  $\mathcal{A}_\alpha$  de la partie du plan limitée par les courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_h)$  et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$ . Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}_\alpha$ .

Annexe (à rendre avec la copie)

