

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse	a	b	b	b

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0.$$

$$2) \text{ On a : } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow U_n > U_{n+1}$$

$$3) p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B} / \bar{A}) = 0,8 \times 0,6 = 0,48.$$

$$4) p(B) = p(A) \cdot p(B / A) + p(\bar{A}) \cdot p(B / \bar{A}) = 0,2 \times 0,3 + 0,8 \times 0,4 = 0,38.$$

Exercice 2

$$1) M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$a) \det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha \times \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = -1 - \alpha^3.$$

$$b) M_\alpha \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \alpha^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + 1 \neq 0$$

$$\alpha^3 + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1$$

Ainsi M_α est inversible si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$2)a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_2 (\alpha = 2); \text{ d'où la matrice } A \text{ est inversible.}$$

$$b) A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$$

$$c) A \times B = 9I_3 \Leftrightarrow A \times \left(\frac{1}{9}B\right) = I_3 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}A\right) \times B = I_3.$$

$$D'où A^{-1} = \frac{1}{9}B \text{ et } B^{-1} = \frac{1}{9}A.$$

$$3)a) (S) : \begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ -2x + 4y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$b) (S) \Leftrightarrow B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}A \times B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}A \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow I_3 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \\ y = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \\ z = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

A) $f(x) = e^x - 1$; $x \in \mathbb{R}$.

1) $f(x) = e^x - 1$; $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

Δ la tangente à (C) au point O.

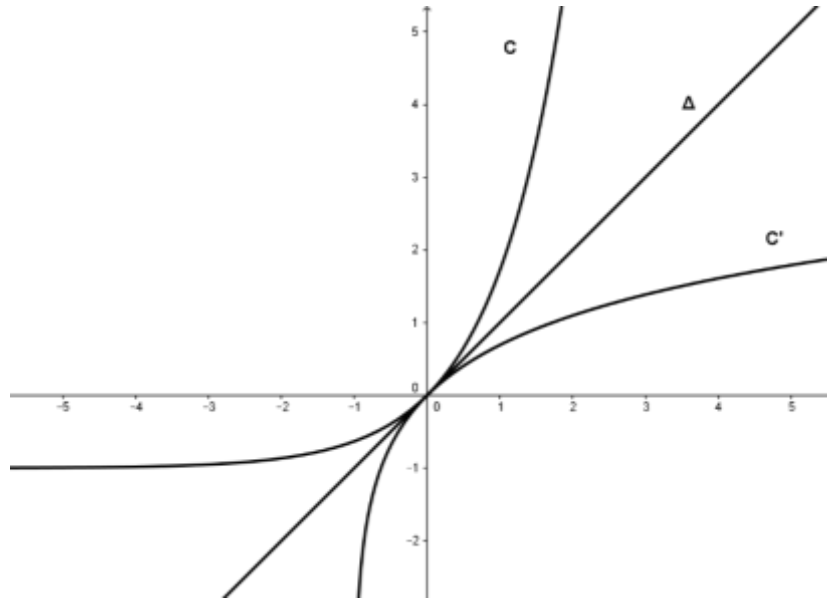
2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty$.

$f'(x) = e^x > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , d'où f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R}) =]-1, +\infty[$. $I =]-1, +\infty[$.

3) La courbe C' de f^{-1} .



4) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in -1, +\infty$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = e^x - 1 \\ &\Leftrightarrow e^x = y + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \ln(y + 1). \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$, $x \in -1, +\infty$.

B) $g(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$; $x \in \mathbb{R}$.

1)a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1} = 0$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

D'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (Γ) de g au voisinage de $(-\infty)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(e^x + 1)} = +\infty.$$

D'où la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$.

2)a) $f(x) - g(x) = -\frac{1}{e^x + 1} < 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où la courbe (Γ) est au-dessus de la courbe (C).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x + 1} = 0$.

3)a) $g(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$; $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1} \right)' = e^x - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

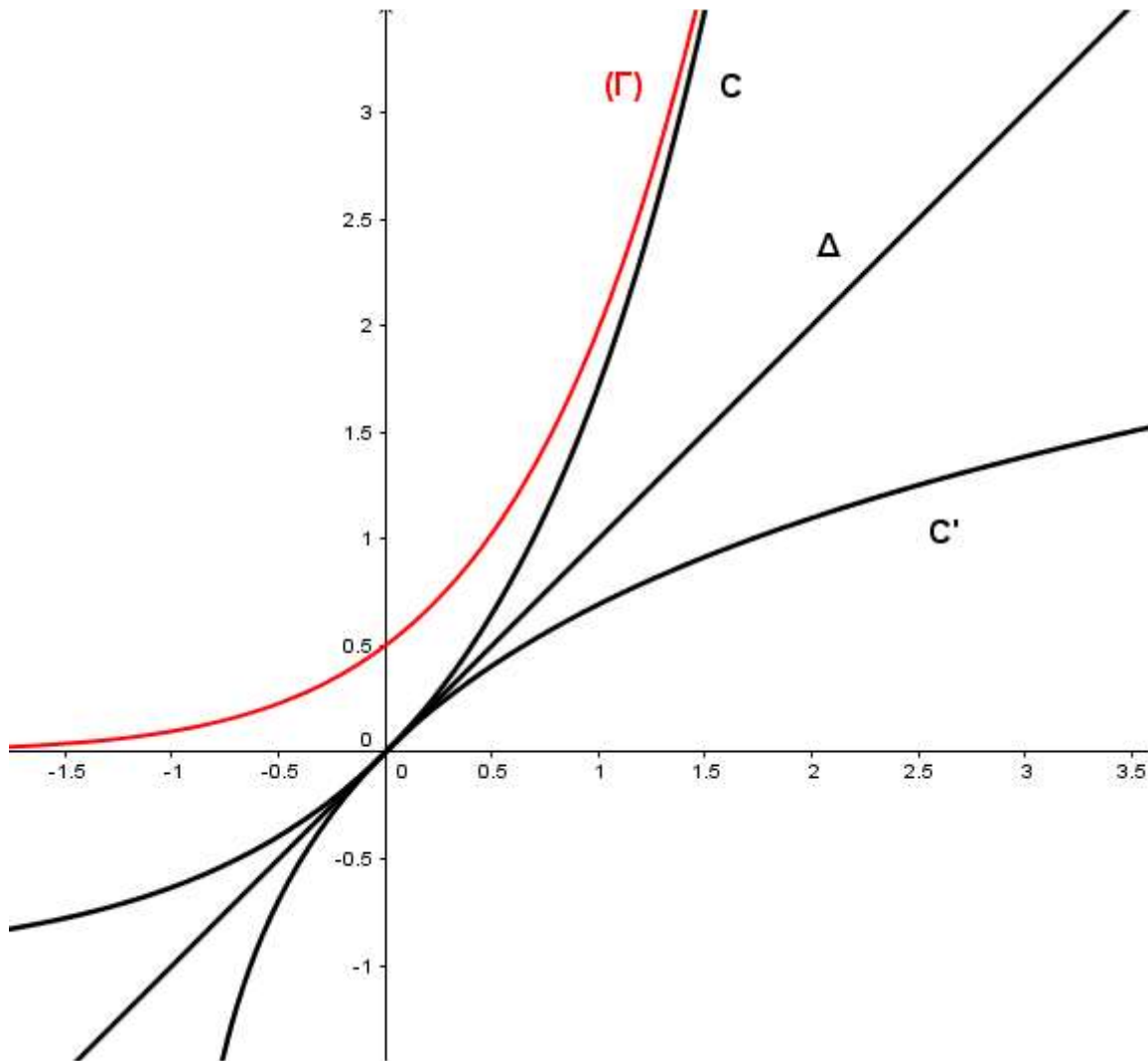
$$= \frac{e^x(e^{2x} + 2e^x + 1) - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^{2x} + 2e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$$

D'où $g'(x) = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) On a $g'(x) = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2} > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	0		$+\infty$

c) $g(0) = \frac{1}{2}$.



4)a) $e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} = e^x - \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1} = g(x)$

D'où $g(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$A = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \left[e^x - \ln(e^x + 1) \right]_0^1$$

$$= e - \ln(e + 1) - 1 - \ln 2 = e - 1 + \ln \left(\frac{2}{e + 1} \right) \text{ u.a.}$$

Exercice 4

1) (E) : $11x - 7y = 4$.

a) (E) : $11 \times 1 - 7 \times 1 = 4$, d'où le couple (1, 1) est une solution de (E).

b) (E) : $11x - 7y = 4 = 11 \times 1 - 7 \times 1 \Leftrightarrow 11(x - 1) - 7(y - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow 11(x - 1) = 7(y - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} 11/7(y - 1) \\ 11 \wedge 7 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 11/y - 1$$

$$\Rightarrow y - 1 = 11k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y = 11k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$11x - 7y = 4 \Rightarrow 11x - 7(11k + 1) = 4$$

$$\Rightarrow 11x = 7(11k + 1) + 4$$

$$\Rightarrow 11x = 7 \times 11k + 11$$

$$\Rightarrow x = 7k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

D'où $S = 7k + 1, 11k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$

2)a) $90 = 8 \times 11 + 2 \equiv 2 \pmod{11}$; $90 = 12 \times 7 + 6 \equiv 6 \pmod{7}$ d'où $90 \in G$.

b) Soit $n \in G$ et (p, q) le couple d'entiers relatifs vérifiant $\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$.

$$n = 11p + 2 = 7q + 6 \Rightarrow 11p + 2 = 7q + 6$$

$$\Rightarrow 11p - 7q = 4$$

$$\Rightarrow (p, q) \text{ est une solution de (E).}$$

c) D'après b) on a montré que si n est un élément de G, alors $\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$ et (p, q) est une solution de (E).

On obtient donc $\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$ et $(p, q) = 7k + 1, 11k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$.

$$n = 11p + 2 = 11(7k + 1) + 2 = 77k + 13.$$

$$n = 77k + 13 \Rightarrow n \equiv 13 \pmod{77}.$$

Ainsi si n est un élément de G, alors $n \equiv 13 \pmod{77}$.

3) Soit n un entier relatif tel que $n \equiv 13 \pmod{77}$.

$$\begin{aligned}
n \equiv 13 \pmod{77} &\Rightarrow n = 77k + 13 ; k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow n = 11(7k + 1) + 2 ; k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow n \equiv 2 \pmod{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n \equiv 13 \pmod{77} &\Rightarrow n = 77k + 13 ; k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow n = 7(11k + 1) + 6 ; k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow n \equiv 6 \pmod{7}
\end{aligned}$$

$n \equiv 2 \pmod{11}$ et $n \equiv 6 \pmod{7}$, d'où $n \in G$.

4) D'après ce qui précède un entier relatif n est un élément de G si et seulement si $n \equiv 13 \pmod{77}$.

Le plus petit élément de G supérieur à 2000, est le plus petit entier supérieur à 2000 et dont le reste de la division euclidienne par 77 est 13. Il suffit de voir les multiples de 77 supérieurs à 2000.

On a : $77 \times 25 = 1925$ et $77 \times 26 = 2002$.

D'où $77 \times 26 + 13 = 2015$ est le plus petit élément de G supérieur à 2000.