Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2015

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1) a) $(z+1)^2=(2+i)^2 \Leftrightarrow (z+1)^2-(2+i)^2=0$

$$\Leftrightarrow \big((z+1)+(2+i)\big)\big((z+1)-(2+i)\big)=0$$
$$\Leftrightarrow \big(z+3+i\big)\big(z-1-i\big)=0$$
$$\Leftrightarrow z+3+i=0 \text{ ou } z-1-i=0$$
$$\Leftrightarrow z=-3-i \text{ ou } z=1+i$$

$S_{\mathbb{C}}=\{-3-i,\ 1+i\}$.

b) Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right] &= (z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right]\\ &=(z-2i)\left[z^2+2z+1-(4+4i-1)\right]\\ &=(z-2i)\left[z^2+2z-(2+4i)\right]\\ &=z^3+2z^2-(2+4i)z-2iz^2-4iz+2i(2+4i)\\ &=z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i).\end{aligned}$$

c) $(E): z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=0$

$$\begin{aligned}z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=0 &\Leftrightarrow (z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right]=0\\ &\Leftrightarrow (z-2i)=0 \text{ ou } (z+1)^2-(2+i)^2=0\\ &\Leftrightarrow z=2i \text{ ou } z=-3-i \text{ ou } z=1+i.\end{aligned}$$

D'où $S_{\mathbb{C}}=\{2i,\ -3-i,\ 1+i\}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=2i$, $z_B=1+i$ et $z_C=-3-i$.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Le centre I du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu du segment $[BC]$.

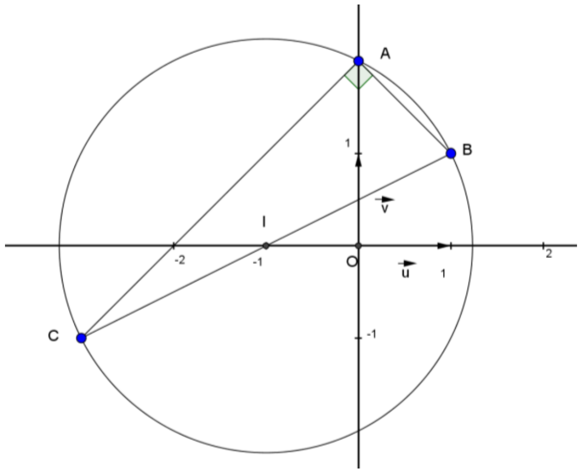
$$z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{1+i+(-3-i)}{2}=-1\ ;\ IB=|z_B-z_I|=|1+i-(-1)|=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

D'où C est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

b) $IA=|z_A-z_I|=|2i-(-1)|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. D'où $A\in$ C.

c) Le point A appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$, d'où BAC est un angle droit, donc ABC est un triangle rectangle en A.

d)



Exercice 2

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{u_n}{2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $u_1 = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{u_0}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{u_1}{2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{17}{12}$; $u_3 = \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{12}{17} + \dfrac{17}{24} = \dfrac{577}{408}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{u_n}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{2 + u_n^2 - 2\sqrt{2}\,u_n}{2u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{2}$.

- $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire que $u_n \geq \sqrt{2}$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$. On a $u_n \geq \sqrt{2}$.

  $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$, car $u_n > 0$. D'où $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

  D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{u_n}{2} - u_n = \dfrac{2 + u_n^2 - 2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{2 - u_n^2}{2u_n} = \dfrac{(\sqrt{2} - u_n)(\sqrt{2} + u_n)}{2u_n}$.

On a $u_n \geq \sqrt{2}$, d'où $\sqrt{2} - u_n \leq 0$ et $\sqrt{2} + u_n > 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.

D'où la suite (u_n) est décroissante.

e) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$. D'où la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. Soit l sa limite. On a $l > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ et la suite (u_n) converge vers l.

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, en particulier f est continue en l.

Par suite $f(l)=l$.

$$\begin{aligned} f(l)=l &\Leftrightarrow \frac{1}{l}+\frac{l}{2}=l \\ &\Leftrightarrow \frac{2+l^2}{2l}-l=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2+l^2-2l^2}{2l}=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2-l^2}{2l}=0 \\ &\Leftrightarrow 2-l^2=0 \\ &\Leftrightarrow l=\sqrt{2}\ ,\ \text{car } l>0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite converge vers $\sqrt{2}$.

3) A l'aide de la calculatrice $u_3\simeq 1{,}4142156$ et $\sqrt{2}\simeq 1{,}4142135$. D'où $0<u_3-\sqrt{2}<10^{-5}$.

Ainsi u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+(1-2x)\ln x$. ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+(1-2x)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+} x+\ln x-2(x\ln x)=-\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$.

b) $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty} x+(1-2x)\ln x \\ &=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1-2x}{x}\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\left(\frac{1}{x}-2\right)\ln x\right) \\ &=-\infty,\ \text{car } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{x}-2\right)\ln x\right)=-\infty.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-2x}{x}\ln x\right)=-\infty.$$

c) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, d'où la courbe ($\mathscr{C}$) admet une asymptote verticale la droite d'équation $x=0$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$, d'où la courbe ($\mathscr{C}$) de f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{i})$.

2)a) $f(x) = x + (1-2x)\ln x,\ \ x \in \left]0, +\infty\right[.$

$$f'(x) = 1 - 2\ln x + (1-2x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 - 2\ln x = \frac{1-x}{x} - 2\ln x,\ \ x \in \left]0, +\infty\right[$$

b) $f'(x) = \dfrac{1-x}{x} - 2\ln x,\ \ x \in \left]0, +\infty\right[\ ;\ f'(1) = \dfrac{1-1}{1} - 2\ln 1 = 0.$

c) Soit $x \in \left]0, 1\right[.$

On a $x > 0,\ 1-x > 0$ et $\ln x < 0$, d'où $\dfrac{1-x}{x} > 0$ et $-2\ln x > 0$ et par conséquent $\dfrac{1-x}{x} - 2\ln x > 0.$

Par suite $f'(x) > 0$, pour tout $x \in \left]0, 1\right[.$

d) Soit $x \in \left]1, +\infty\right[.$

On a $x > 1,\ 1-x < 0$ et $\ln x > 0$, d'où $\dfrac{1-x}{x} < 0$ et $-2\ln x < 0$ et par conséquent $\dfrac{1-x}{x} - 2\ln x < 0.$

Par suite $f'(x) < 0$, pour tout $x \in \left]1, +\infty\right[.$

e) Le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3)a) Pour étudier la position de la courbe par rapport à la droite $\Delta : y = x.$

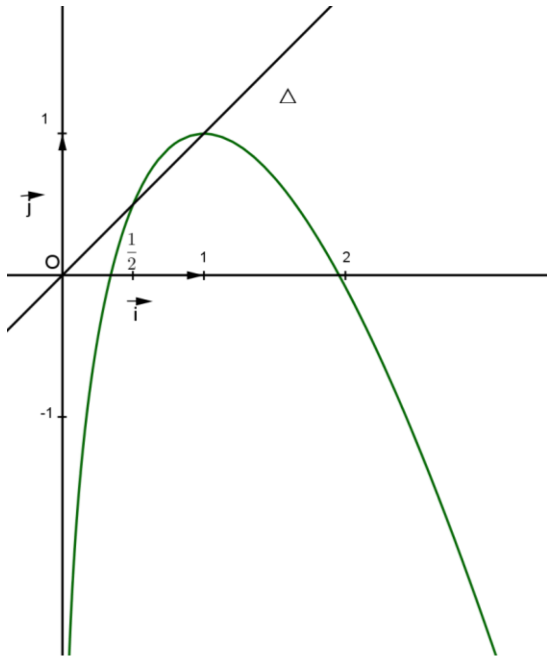
$f(x) - x = (1-2x)\ln x,\ \ x \in \left]0, +\infty\right[.$

$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow (1-2x)\ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1. \end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ		$(\mathscr{C})$ est au-dessous de Δ		$(\mathscr{C})$ est au-dessus de Δ		$(\mathscr{C})$ est au dessous de Δ	

b) $f(2) = 2 - 3\ln 2.$

La courbe $(\mathscr{C})$:



4) $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{2}$ et $x=1,$ la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite Δ.

a) $F(x)=(x^2-x)(1-\ln x),\ x\in\left]0,+\infty\right[.$ F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[.$

$$F'(x)=(x^2-x)'(1-\ln x)+(x^2-x)(1-\ln x)'\quad ;\ x\in\left]0,+\infty\right[$$
$$=(2x-1)(1-\ln x)-(x^2-x)\frac{1}{x}$$
$$=(2x-1)+(1-2x)\ln x\quad -x+1$$
$$=x+(1-2x)\ln x\quad =f(x).$$

$F'(x)=f(x),$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[,$ d'où F est une primitive de f sur $\left]0,+\infty\right[.$

$$\mathcal{A}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)-x\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)-x\right)dx=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=F(1)-\frac{1}{2}-\left(F(\frac{1}{2})-\frac{1}{8}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-\left((\frac{1}{4}-\frac{1}{2})(1+\ln 2)-\frac{1}{8}\right)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{1}{8}\text{ unité d'aire}=\ln 2-\frac{1}{2}\text{ cm}^2.$$

Exercice 4

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$ l'équation $(E):5x+3y=60.$

a) $5\times 2+3\times(-3)=10-9=1.$ D'où $(2,-3)$ est une solution de l'équation $(E'):5x+3y=1.$

Par conséquent $(120,-180)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) $(120,-180)$ est une solution particulière de l'équation (E), d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S=\left\{(-3k+120,\ 5k-180)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

c) Les couples d'entiers naturels non nuls solutions de l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{N}^* \text{ et } y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} -3k+120>0 \\ 5k-180>0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<40 \\ k>36 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k=37 \text{ ou } k=38 \text{ ou } k=39.$$

D'où $(x,y) \in \{(9,5);(6,10);(3,5)\}$.

2) x est le nombre d'ordinateurs et y est le nombre d'imprimantes. Le prix d'un ordinateur est de 500 dinars et le prix d'une imprimante est de 300 dinars. On a $x > y$.

Le montant total consacré aux achats est de 6000 dinars.

a) On a : $500x + 300y = 6000$ et $x > y$.

$500x + 300y = 6000 \Leftrightarrow 5x + 3y = 60.$

b) Le couple (x,y) d'entiers naturels non nuls cherché est une solution de l'équation (E) et tel que $x > y$. D'où $(x,y) = (9, 5)$.

Ainsi le directeur peut acheter 9 ordinateurs et 5 imprimantes.