Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2015

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

I)		II)	III)
1)	2)	a	b
b	c		

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Les points $A(4,0,0)$; $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$.

1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Par conséquent les points A, B et C déterminent un plan P.

Un vecteur normal à ce plan est $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix}$, d'où une équation du plan P est de la forme $16x+16y+16z+c=0$.

$A(4,0,0)\in P$, d'où $16\times4+16\times0+16\times0+c=0$, donc $c=-64$.

$P:\ 16x+16y+16z-48=0$. Ainsi $P:\ x+y+z-4=0$.

c) L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+16^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3\times16^2}=8\sqrt{3}$.

2)a) $G(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$; $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{8}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$. Il est clair que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

D'où G est le centre de gravité du triangle ABC.

b) Le vecteur $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal au plan P, or le plan P est le plan (ABC). Donc la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC) en G.

Ainsi $[OG]$ est la hauteur issue de O du tétraèdre OABC.

3) I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC], [AB]$ et $[BC]$.

a) En appliquant le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a :

(KI) est parallèle à (AB) et $KI = \frac{1}{2}AB$, en prenant compte du sens on a $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

De même on a $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{KJ} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Remarque : On pourra utiliser les coordonnées pour établir les relations.

b) $L'\text{aire du triangle IJK} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{KJ}\right\|$

$$= \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\text{aire du triangle ABC}) = \frac{1}{4} \times 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

4) V et V', respectivement, les volumes des tétraèdres OABC et OIJK.

On peut remarquer que G est aussi le centre de gravité du triangle IJK et que $[OG]$ est la hauteur issue de O du tétraèdre OIJK.

$$V = \frac{1}{3}(\text{aire du triangle ABC}) \times OG$$

$$= 4 \times \frac{1}{3}(\text{aire du triangle IJK}) \times OG = 4V'$$

$$\text{D'où } \; V' = \frac{1}{4} \times V.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x$.

1)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)e^x = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - xe^x = 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1-x)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - 1)e^x = -\infty.$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, d'où la courbe (C) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$.

2)a) $f(x) = (1-x)e^x, x \in \mathbb{R}$. On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

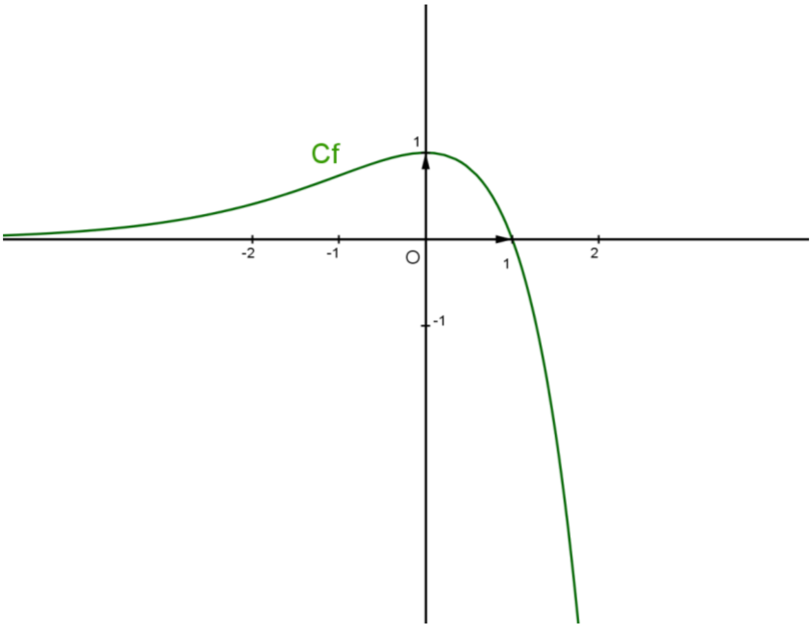
$f'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)e^x = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x,\ x \in \mathbb{R}.$

b) $f'(x) = 0 \iff -xe^x = 0 \iff x = 0.$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

c)



3)a) $e^x f(x) + f'(x)f(x) = \left[e^x + f'(x)\right] f(x) = \left[e^x - x e^x\right] f(x) = \left[(1-x)e^x\right] f(x) = f(x)f(x) = \left(f(x)\right)^2$.

b) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{4}(3-2x)e^{2x}$.

La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$H'(x) = \frac{1}{4}(3-2x)'e^{2x} + \frac{1}{4}(3-2x)2e^{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}(3-2x)\,e^{2x}$$

$$= e^{2x} - x\,e^{2x} = e^x(1-x)e^x = e^x f(x).$$

On a $H'(x) = e^x f(x)$, d'où H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^x f(x)$.

c) V est le volume de révolution du solide engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, de la partie du plan limitée par la courbe (C), et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

$$V = \pi\int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left[e^x f(x) + f'(x)f(x)\right]dx$$

$$= \pi\left[H(x) + \frac{1}{2}\left(f(x)\right)^2\right]_0^1$$

$$= \pi\left[H(1) + \frac{1}{2}\left(f(1)\right)^2 - H(0) - \frac{1}{2}\left(f(0)\right)^2\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{4}(e^2 - 5)\ \text{unité de volume}.$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=\sqrt{3}+i$ et $z_C=-z_B$.

1)a) $z_A=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

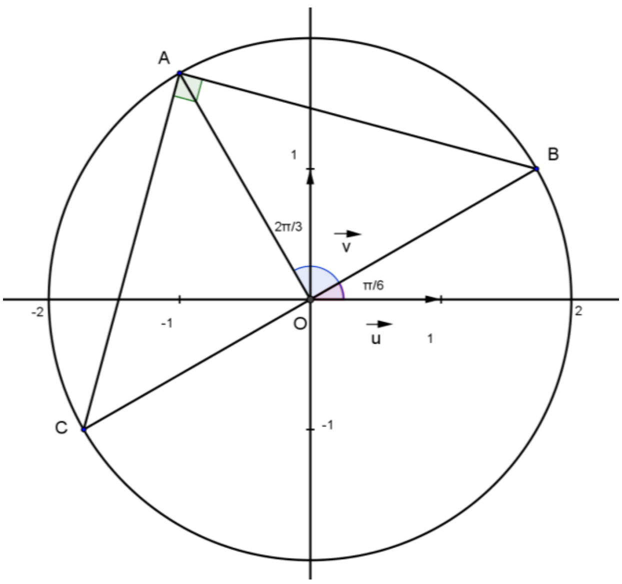
$z_B=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$z_C=-z_B=-2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

b) $OA=|z_A|=\left|2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right|=2$; $OB=|z_B|=\left|2e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=2$; $OC=|z_C|=\left|2e^{i\frac{7\pi}{6}}\right|=2$.

On a $OA=OB=OC$, d'où les points A, B et C appartiennent au cercle ζ de centre O et de rayon 2.

c)



2)a) On a $z_C=-z_B$ d'où O est le milieu du segment $[BC]$. D'autre part, les points B et C sont sur le cercle ζ de centre O, donc $[BC]$ est un diamètre de ce cercle.

A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ d'où $\widehat{BAC}$ est un angle droit et par conséquent le triangle ABC est rectangle en A.

b) L'aire du triangle BAC est égale à $\frac{AB\times AC}{2}$.

$$AB=|z_B-z_A|=\left|\sqrt{3}+i-(-1+i\sqrt{3})\right|$$
$$=\left|\sqrt{3}+1+i(1-\sqrt{3})\right|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$AC=|z_C-z_A|=|-\sqrt{3}-i-(-1+i\sqrt{3})|$$
$$=|-\sqrt{3}+1+i(-1-\sqrt{3})|=\sqrt{(-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

L'aire du triangle BAC est égale à $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{2}=4$ unité d'aire.

<u>Autrement</u> (moins de calcul):

On peut remarquer que $\widehat{BOA}$ est un angle droit (une mesure de $\widehat{BOA}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$), d'où $[OA]$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est donc, $\dfrac{BC\times OA}{2}=\dfrac{4\times 2}{2}=4$ unité d'aire.

3) M est un point du plan, $z_M=2e^{i\theta}$, avec $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}\right[$. S l'aire du triangle MBC.

a) $OM=|z_M|=|2e^{i\theta}|=2$, d'où le point M appartient au cercle ζ.

On a M appartient au cercle de diamètre $[BC]$, d'où MBC est un triangle rectangle en M.

b) $$S=\frac{MB\times MC}{2}=\frac{|z_B-z_M|\times|z_C-z_M|}{2}=\frac{|z_B-z_M|\times|-z_B-z_M|}{2}$$
$$=\frac{|(z_B-z_M)(z_B+z_M)|}{2}=\frac{|z_B^2-z_M^2|}{2}=\frac{\left|\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2-\left(2e^{i\theta}\right)^2\right|}{2}=\frac{\left|4e^{i\frac{\pi}{3}}-4e^{2i\theta}\right|}{2}=2\left|e^{2i\theta}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right|.$$

c) $$e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}\left(e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}\right)=e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}.e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}.e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}$$
$$=e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})+i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})-i(\theta-\frac{\pi}{6})}=e^{i2\theta}-e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

d) $$S=2\left|e^{2i\theta}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=2\left|e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}\left(e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}\right)\right|=2\left|e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}\right|\times\left|e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}\right|=2\left|e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}\right|$$

D'autre part les nombres complexes $e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}$ et $e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}$ sont des conjugués, d'où

$e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}=2i\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})$. Ainsi $S=2\left|e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}-e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}\right|=2\left|2i\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})\right|=4\left|\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})\right|$.

4) $S=4\left|\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})\right|,\ \theta\in\left]\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}\right[$.

S est maximale $\Leftrightarrow\left|\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})\right|=1$

$\Leftrightarrow\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$; $\left(\theta\in\left]\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}\right[\text{, donc }\theta-\dfrac{\pi}{6}\in\left]0,\ \pi\right[\right)$

$\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{3}.$