Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2015

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $U_1 = \dfrac{1}{4}U_0 + 3 = \dfrac{1}{4} \times 2 + 3 = \dfrac{7}{2}.$

$U_2 = \dfrac{1}{4}U_1 + 3 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{7}{2} + 3 = \dfrac{7}{8} + \dfrac{24}{8} = \dfrac{31}{8}.$

b) $U_1 - U_0 = \dfrac{7}{2} - 2 = \dfrac{3}{2}$; $U_2 - U_1 = \dfrac{31}{8} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{3}{8}$

On a $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$, d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

$\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{7}{4}$; $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\frac{31}{8}}{\frac{7}{2}} = \dfrac{31}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{31}{28}.$

On a $\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$, d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2)a) Montrons par récurrence que $U_n < 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $U_0 = 2 < 4$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $U_n < 4$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

On a $U_n < 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4}U_n < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}U_n + 3 < 4$

$\Rightarrow U_{n+1} < 4$

D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $U_n < 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{4}U_n + 3 - U_n = 3 - \dfrac{3}{4}U_n = \dfrac{3}{4}(4 - U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{3}{4}(4 - U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 4$, d'où $U_{n+1} - U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite $U_{n+1} > U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (U_n) est croissante.

3)a) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}U_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}U_n - 1 = \frac{1}{4}(U_n - 4) = \frac{1}{4}V_n.$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) $V_0 = U_0 - 4 = 2 - 4 = -2.$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = -2$.

On a $V_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n V_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times (-2) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -2\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (U_n - 4) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 4$$

4) $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$, $S'_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

S_n est la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = -2$.

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} V_0 = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \times (-2) = \frac{-8}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{-8}{3} \times \left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right).$$

$$\begin{aligned} S'_n = U_0 + U_1 + ... + U_n &= (V_0 + 4) + (V_1 + 4) + ... + (V_n + 4) \\ &= 4(n+1) + V_0 + V_1 + ... + V_n \\ &= 4(n+1) + S_n \\ &= 4(n+1) - \frac{8}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 2

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher dont :

- quatre noirs et numérotés : 1 ; 2 ; 2 et 3.
- trois blancs et numérotés : 1 ; 2 et 2.

On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac.

1) Soit Ω l'univers des cas possibles. On a $\text{Card}(\Omega) = C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7\times 6}{2} = 21.$

a) A : « Obtenir deux jetons blancs »

C'est-à-dire tirer les deux jetons parmi les 3 blancs.

$p(A) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$

b) L'évènement A : « Obtenir deux jetons blancs » on peut le traduire autrement par « Obtenir aucun jeton noir ». Donc l'évènement $\overline{A}$: «Obtenir au moins un jeton noir ». Ainsi $B=\overline{A}$

$p(B)=p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.

2) C : « La somme des numéros portés par les deux jetons est égale à 4 ».
C'est-à-dire tirer deux jetons qui portent le numéro 2 ou tirer un jeton qui porte le numéro 1 et un jeton qui porte le numéro 3.

$p(C)=\frac{C_4^2+C_2^1C_1^1}{21}=\frac{6+2}{21}=\frac{8}{21}$.

3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la somme des numéros portés par les deux jetons tirés.

a) $(X=2)$: « La somme des numéros portés par les deux jetons tirés est 2», c'est-à-dire tirer les deux jetons portant le numéro 1.

$p(X=2)=\frac{C_2^2}{21}=\frac{1}{21}$.

$(X=3)$: « La somme des numéros portés par les deux jetons tirés est 3», c'est-à-dire tirer un jeton portant le numéro 1 et un jeton portant le numéro 2.

$p(X=3)=\frac{C_2^1\times C_4^1}{21}=\frac{8}{21}$.

$(X=5)$: « La somme des numéros portés par les deux jetons tirés est 5», c'est-à-dire tirer un jeton portant le numéro 2 et le jeton portant le numéro 3.

$p(X=5)=\frac{C_4^1\times C_1^1}{21}=\frac{4}{21}$.

Le tableau résumant la loi de probabilité de X est :

x_i	2	3	4	5
$p_i=p(X=x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{4}{21}$

b) L'espérance mathématique de X : $E(X)=2\times\frac{1}{21}+3\times\frac{8}{21}+4\times\frac{8}{21}+5\times\frac{4}{21}=\frac{78}{21}=\frac{26}{7}$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) On a le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

1) D'après le tableau de variation on a :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) $f(0)=1$ et $f'(0)=0$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et on a $f([0, +\infty[) =]-\infty, 1]$

D'où il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty, 1]$ telque $f(\alpha) = 0$.

B) On suppose que $f(x) = x + 2 - e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) $f(1) = 1 + 2 - e^1 = 3 - e > 0$; $f(2) = 2 + 2 - e^2 = 4 - e^2 < 0$ d'où $1 < \alpha < 2$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2-e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, d'où la courbe (C) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{j})$.

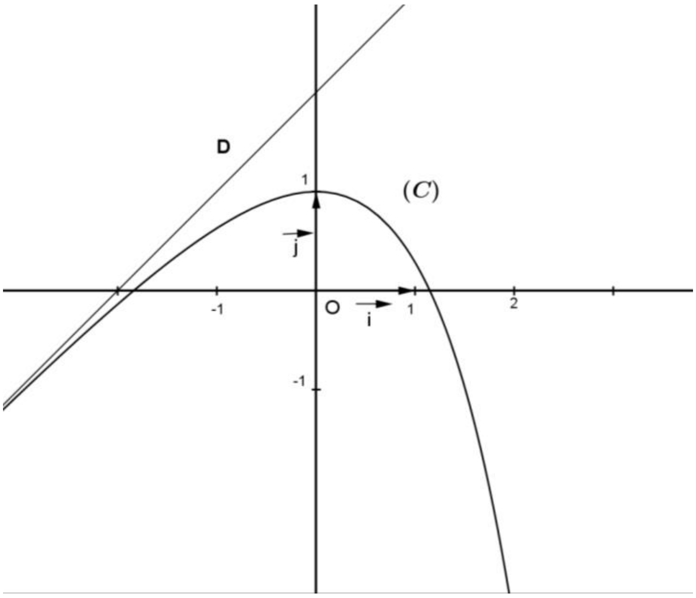
3) Soit D la droite d'équation $y = x + 2$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$, d'où la droite D est une asymptote oblique pour la courbe (C) au voisinage de (-∞).

b) On a $f(x) - (x+2) = -e^x < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où la courbe (C) est au-dessous de la droite D.

4) La courbe (C) de la fonction f.



5) F la fonction définie sur par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - e^x$.

a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = x + 2 - e^x = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} + 2 - e^1\right) + 1 = \frac{7}{2} - e \text{ unité d'aire.}$$