MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques

Session de contrôle : juin 2015

Exercice 1 (Thèmes : similitude directe ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) a) Une mesure de l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AI}, \widehat{\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AD}, \widehat{\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{DA}, \widehat{\overrightarrow{DB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Le rapport de f est $\frac{OB}{AI} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}AD} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

b) $\frac{DB}{AD} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \widehat{\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, il en résulte que D est le centre de f.

2) a) [AC] est un diamètre de (ζ) et $E \in (\zeta) \setminus \{A, C\}$ donc $(CE) \perp (AE)$ et $(BH) \perp (AE)$ donc $(BH) // (CE)$, or (CE) passe par J le milieu de [AB] et coupe [AH] en E, il en résulte que E est le milieu de [AH].

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EH} = -EA \times EH = -EA^2$.

b) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = EA.EB.\cos\left(\widehat{AEB}\right) = EA.EB.\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB.$

car $\left(\overrightarrow{EB}, \widehat{\overrightarrow{EA}}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{CB}, \widehat{\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

3) a) Le rapport de g est $\frac{EA}{EB} = \frac{EH}{\sqrt{2}EH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

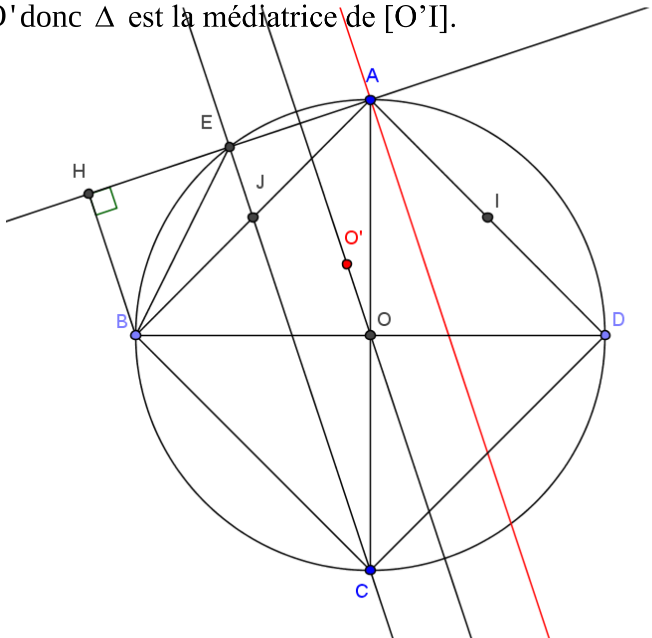
b) Le triangle OEB est isocèle donc son image par g est un triangle isocèle, on en déduit que le triangle O'EA est isocèle.

c) On sait que $f(A) = B$ et $f(I) = O$ donc $AI = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$ de plus

$g(B) = A$ et $g(O) = O'$ donc $AO' = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$, il en résulte que $O'A = AI$.

4) S est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ est d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc S est une similitude indirecte de rapport 1 donc S est un antidéplacement.

$S(A) = g(f(A)) = g(B) = A$, il en résulte que S est une symétrie orthogonale d'axe Δ qui passe par O de plus $S(I) = g(f(I)) = g(O) = O'$ donc Δ est la médiatrice de [O'I].



Exercice 2 (Thèmes : sphère ; homothétie dans l'espace)

1) a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$, on en déduit que S est la sphère de centre $I(0,3,2)$ et de rayon 2.

b) Il suffit de vérifier que $A\in S,\ B\in S$ et I est le milieu de [AB]..

2) a) La cote du point I est 2 donc $I\in P$ par suite S coupe P suivant le cercle Γ de centre I et de rayon 2, or A et B appartiennent à P et I est le milieu de [AB]. donc [AB] est un diamètre de Γ.

b) $IA=2,\ JA=4$ et $IJ=6$ donc $IA+JA=IJ$ par suite Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A.

3) a) Le rayon de S' est égal à $\frac{5}{2}\times 2=5$. On pose $I'(x,y,z)$,

$$h(I)=I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'}=\frac{5}{2}\overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-10 \\ y-3=0 \\ z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$$, il en résulte que $I'(-6,3,5)$.

b) $d(I',P)=3<5$ donc S' coupe P suivant un cercle de rayon $\sqrt{25-9}=4$ et de centre le projeté orthogonal de I' sur P, or J est un point de P et $\overrightarrow{I'J}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I' sur P, il en résulte que P coupe S' suivant le cercle Γ'.

c) $A\in S\cap(EA)$ donc $h(A)\in S'\cap(EA)=\{A,A'\}$ or $h(A)\neq A$ donc $h(A)=A'$.

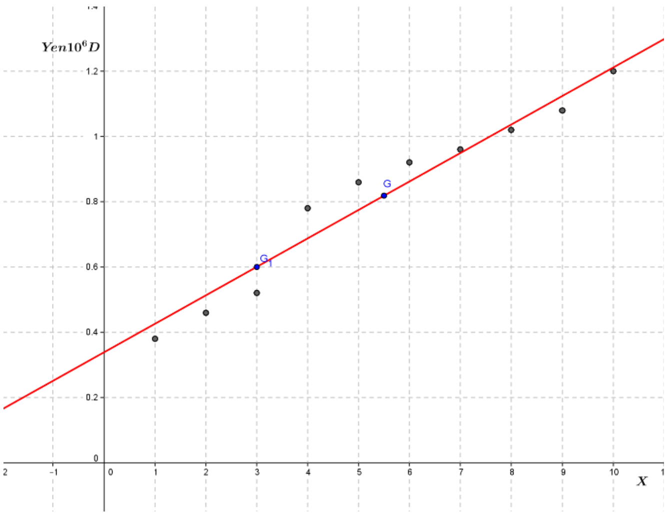
B est le point diamétralement opposé à A sur S donc $h(B)$ est le point diamétralement opposé à A' sur S', on en déduit que $h(B)=B'$ par suite E, B et B' sont alignés.

Exercice 3 (Thème : statistique à deux variables)

1) a) $G(\overline{X},\overline{Y})$ donc $G(5.5,0.818)$.

b) $G_1(3,0.6)$.

c)



d) $a=\frac{0.6-0.818}{3-5.5}=0.09$ donc $(GG_1):y=0.0872x+b$ or $G_1\in(GG_1)$

donc $0.6=0.09\times 3+b \Leftrightarrow b=0.33$, il en résulte que $(GG_1):y=0.09x+0.33$.

e) Pour $x = 16$, on obtient $y = 1.77$.

2) a) $r = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = 0.987$.

b) $Z = bX + a$ avec $b = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sigma_X^2} = 0.2$ et $a = \overline{Z} - b\overline{X} = 1.23$. Ainsi $Z = 0.2X + 1.23$

c) $Z = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow e^Y = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow Y = \ln(0.2X + 1.23)$. Pour $x = 16$, on obtient $y = 1.488399584$.

<u>Exercice 4</u> (Thèmes : variation d'une fonction ; notion de primitive ; notion d'aire)

I. 1) a) Pour tout $t > 0$, $u'(t) = \dfrac{3}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2} = \dfrac{2+3t}{(1+t)^2} > 0$.

x	0	$+\infty$
$u'(t)$		$+$
u	0	$\nearrow$ $+\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 3\ln(1+t) - \dfrac{1}{\frac{1}{t} + 1} = +\infty$.

b) $u(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$ donc $u(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x = 0 = f_d'(0)$ donc f est dérivable à droite en 0.

b) Pour tout $x \in]0,1]$, $f'(x) = 3x^2\left[\ln(1+x) - \ln x\right] + x^3\left[\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x}\right]$

$$= x^2\left[3\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right] = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) On a $u(x) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $u\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ pour tout $x \in]0,1]$ d'où $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	$+$
f	0	$\nearrow$ $\ln 2$

II. 1) Pour tout $x \in]0,1]$, $h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$.

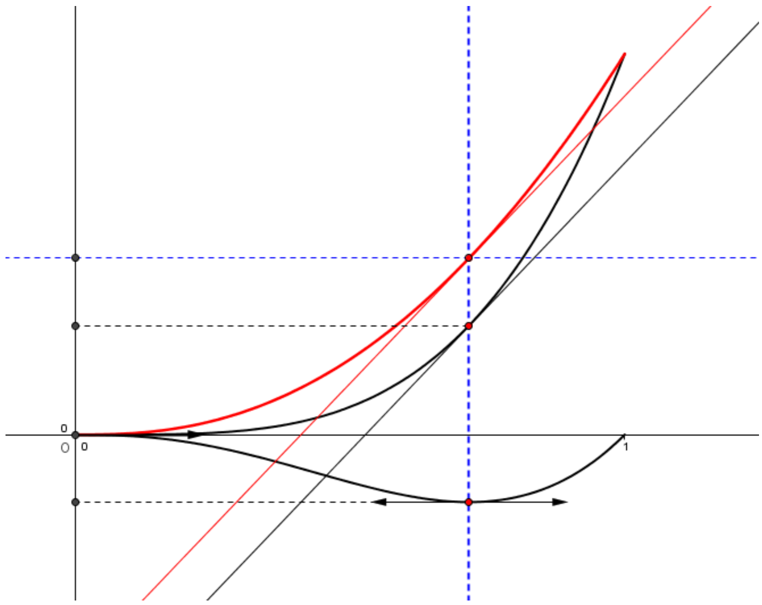
Pour tout $x \in]0,1]$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$. On en déduit que (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$ et $f(0) = g(0) - h(0)$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = g(x) - h(x)$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$ donc (C_f) est au-dessus de (C_g) et les points $(0,0)$ et $(1, \ln 2)$ sont des points d'intersection.

c) $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$ donc $T \parallel T'$.

3)



4) a) La fonction h est continue sur $[0,1]$ donc elle admet une unique primitive H qui s'annule en 1.

b) $A(\alpha) = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$.

c) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$A(\alpha) = \left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{4}\int_\alpha^1 x^3 dx = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16}\left[x^4\right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\alpha^4.$$

d) $H(0) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} -A(\alpha) = \dfrac{1}{16}$.

e) $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = -\int_0^1 h(x)dx = H(0) = \dfrac{1}{16}$.