

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

I)		II)	
1)	2)	1)	2)
a	b	b	a

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$1) \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 2 \times 6 + 3 \times 1 = -2.$$

$\det(A) \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

$$2)a) A \times B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $A \times B + 2I = 0$, où 0 est la matrice nulle d'ordre 3.

$$A \times B + 2I = 0 \Leftrightarrow A \times B = -2I$$

$$\Leftrightarrow A \times \left(-\frac{1}{2}B\right) = I$$

D'où l'inverse de A est $A^{-1} = -\frac{1}{2}B$.

$$3)a) (S) : \begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) (S): } \begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x+3y+2z=4 \\ 3x+4y+5z=8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}B \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(15, -8, -1)\}$.

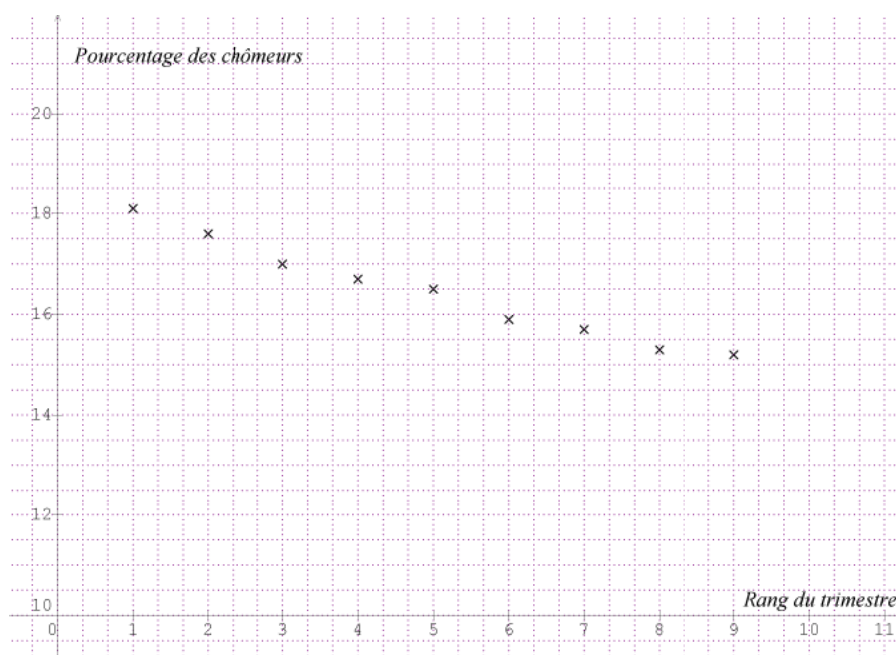
Exercice 3

Le tableau donne les pourcentages des chômeurs en Tunisie pendant neuf trimestres successifs à compter du premier trimestre de l'année 2012.

Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pourcentage des chômeurs y_i	18,1	17,6	17	16,7	16,5	15,9	15,7	15,3	15,2

Source : I.N.S

1) Le nuage des points de la série statistique (x_i, y_i) .



2)a) $r(x, y) = -0,99$.

b) On peut remarquer que le nuage des points (x_i, y_i) est allongé suivant une droite. Donc un ajustement affine entre x et y est justifié.

3)a) Une équation de la droite de régression de y en x est $y = -0,38x + 18,31$.

b) Le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015. Le deuxième trimestre de l'année 2015 correspond à $x = 14$.

D'où $y = -0,38 \times 14 + 18,31 = 12,99 \approx 13$.

Ainsi on estime le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015 à 13%.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1)a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, d'où l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, d'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale pour (C).

2)a) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{1 \cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}, x \in]0, +\infty[.$$

$$f'(1) = \frac{-\ln 1}{1^2} = 0.$$

b) Le tableau de variation de f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	1	0

c) On a $f(]1, +\infty[) =]0, 1]$, d'où sur l'intervalle $]1, +\infty[$ f ne s'annule pas.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $f(]0, 1]) =]-\infty, 1]$.

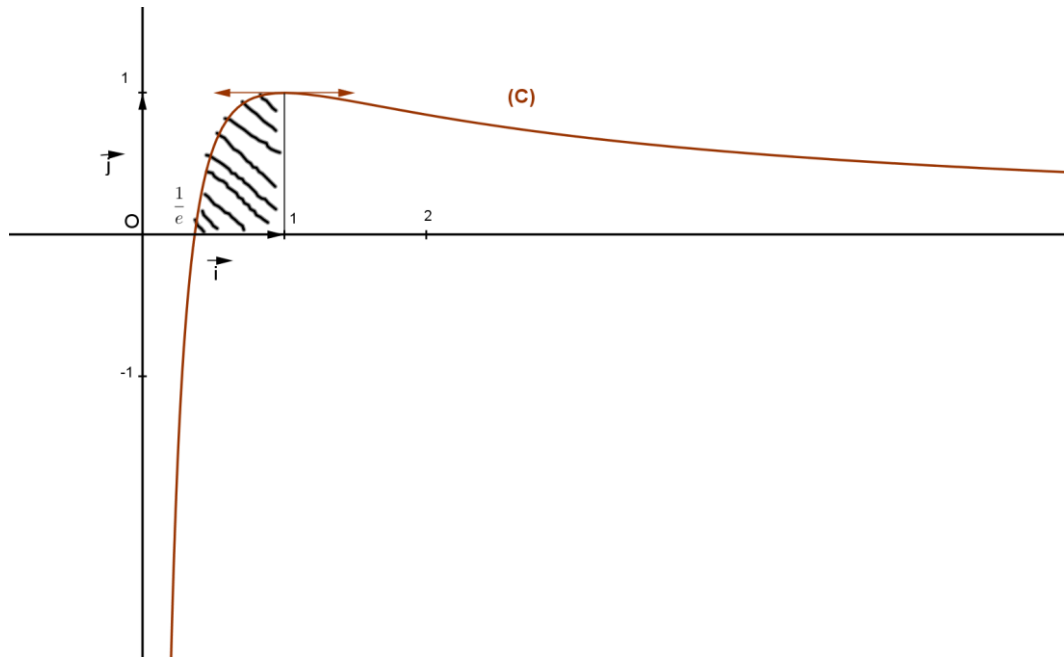
$0 \in]-\infty, 1]$, d'où il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in]0, +\infty[, f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 + \ln x}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \alpha = \frac{1}{e}.$$

d) La courbe (C) de la fonction f :



3)a) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}(2 + \ln x)\ln x$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ et la fonction $x \mapsto 2 + \ln x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$, d'où F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}(2 + \ln x)' \ln x + \frac{1}{2}(2 + \ln x)(\ln x)' = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{2}(2 + \ln x) \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x} (2 + 2 \ln x) = \frac{1 + \ln x}{x} = f(x) \end{aligned}$$

D'où F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

b) R la région du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1$. Soit A l'aire de cette région R.

$$\begin{aligned} A &= \int_{e^{-1}}^1 f(x) dx = [F(x)]_{e^{-1}}^1 = F(1) - F(e^{-1}) \\ &= 0 - \frac{1}{2}(2 + \ln e^{-1}) \ln e^{-1} = -\frac{1}{2}(2 + (-1)) \times (-1) = \frac{1}{2} \text{ unité d'aire.} \end{aligned}$$