# Session principale Bac 2014

# Section : Sc Expérimentales

**Exercice 1**

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = +\infty.$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x\left(1+e^{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right)\frac{-1}{\left(1+e^{x}\right)} = -\infty.$$

Graphiquement : $(C_f)$ admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{j})$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}\left(1+e^{x}\right)-e^{-x}e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^2} = \dfrac{-e^{-x}-2}{\left(1+e^{x}\right)^2} = -\dfrac{\left(2+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{x}\right)^2}.$

b) Pour tout réel x, $f'(x) < 0.$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 0$ |

3) a) $(T): y = f'(0)x + f(0) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}.$

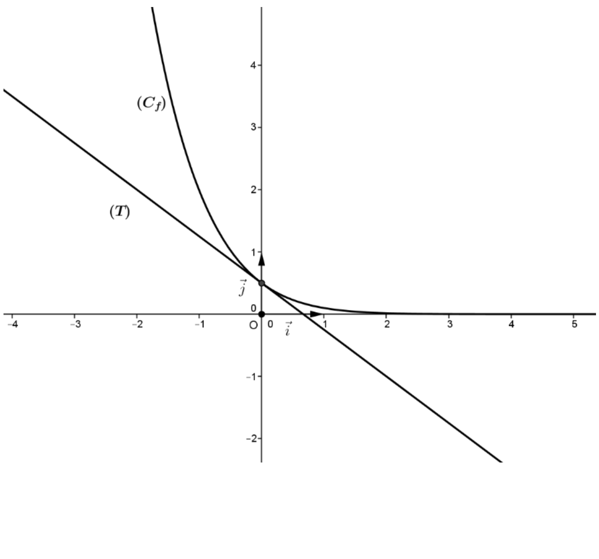
b)

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)+\dfrac{3}{4}$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

La fonction $x \mapsto f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 donc pour tout réel x,

$f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}.$ Il en résulte que $(C_f)$ est au-dessus de $(T)$.

c)



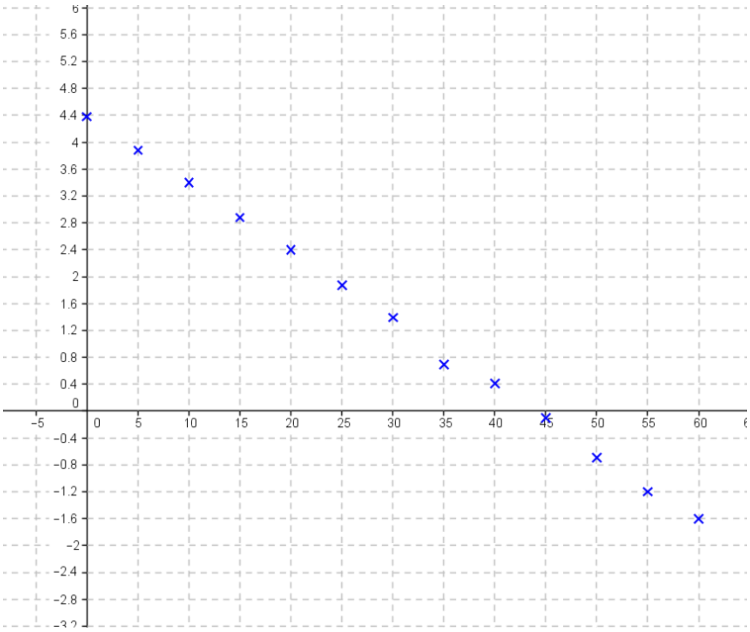
4) a) Pour tout réel x, $e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}=f(x)$.

b) $A_\lambda=\int_0^\lambda f(x)dx=\int_0^\lambda\left(e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx=\left[-e^{-x}+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^\lambda=\left(-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2\right)ua$.

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2=1-\ln 2.$

**Exercice 2**

1) a)



b) $\rho_{t,\theta}=\dfrac{\operatorname{cov}(t,\theta)}{\sigma_t\sigma_\theta}=-0,99.$ Il y a une forte corrélation de plus le nuage a la forme d'une droite donc $\left|\rho_{t,\theta}\right|=0.99>\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

un ajustement affine est justifié.

2) a) $(D):\theta=bt+a$ avec $b=\dfrac{\operatorname{cov}(t,\theta)}{\sigma_t^2}=-0.1$ et $a=\bar{\theta}-b\bar{t}=4,39.$

Il en résulte que : $(D):\theta=-0.1t+4,39.$

b) $\theta=\ln(T-20)\Leftrightarrow T=20+e^{\theta}=20+e^{-0.1t+4,39}=20+80.6e^{-0.1t}$

c) Pour $t=90,\ \theta=20+80.6e^{-0.1\times 90}=20^\circ C.$

d) $T=18\Leftrightarrow 20+80.6e^{-0.1t}=18\Leftrightarrow e^{-0.1t}=\dfrac{-2}{80.6}<0$ impossible donc la température n'atteindra jamais 18°C.

**Exercice 3**

1) a) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=8$ donc S est une sphère de centre O et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

b) $d(O,P)=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}<2\sqrt{2}$ donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$ et de centre I le projeté orthogonal de O sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc $D:\begin{cases}x=t\\y=2t\,,t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

$I(x,y,z)\in D\cap P \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\\x+2y+z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\\6t-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\x=1\\y=2\\z=1\end{cases}$, il en résulte que $I(1,2,1)$.

2) a) $\begin{cases}2^2+0^2+2^2-8=0\\2+0+2-6=-2\neq 0\end{cases}$ donc $A\in S$ et $A\notin P$.

$\begin{cases}2^2+2^2+0^2-8=0\\2+4+0-6=0\end{cases}$ donc $B\in S$ et $B\in P$ donc B appartient à ($\mathscr{C}$).

b) $M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2 \Leftrightarrow y=z.$

c) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite $\Delta:\begin{cases}x+2y+z-6=0\\y=z\end{cases}$, on pose

$y=\alpha\in\mathbb{R}$ , on aura $\Delta:\begin{cases}x=-3\alpha+6\\y=\alpha\\z=\alpha\end{cases},\alpha\in\mathbb{R}.$

3) ABC est équilatéral si et seulement si $CA=CB=AB$.
$CA=CB$ donc C est un point de Q et C appartient à ($\mathscr{C}$) qui est contenu dans P donc C est un point de $\Delta$, il en résulte qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $C(-3\alpha+6,\alpha,\alpha)$.

Ainsi pour que ABC soit équilatéral , il suffit que $CA=AB \Leftrightarrow CA^2=AB^2 \Leftrightarrow$

$(4-3\alpha)^2+\alpha^2+(\alpha-2)^2=8 \Leftrightarrow \alpha=2$ ou $\alpha=\frac{6}{11}$. soit $C(0,2,2)$.

**<u>Exercice 4</u>**

1) a) $z_1+z_2=-i\sqrt{3}$ et $z_1\times z_2=-2$.

b) $\begin{cases}z_1+z_2=-i\sqrt{3}\\z_1\times z_2=-2\end{cases}$ donc $z_1$ et $z_2$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+i\sqrt{3}z-2=0$, il en résulte que $z^2+i\sqrt{3}z-2=(z-z_1)(z-z_2)$ où $z\in\mathbb{C}$.

2) a) $OM_1=|z_1|=\sqrt{2}$ et $OM_2=|z_2|=\sqrt{2}$ donc $M_1$ et $M_2$ appartiennent au cercle (C).

b) $\frac{z_1+z_2}{2}=-i\sqrt{3}=z_H$

c) Voir figure.

3) a) $K=M*N \Leftrightarrow \frac{z+z^3}{2}=-i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^3+z+2i\sqrt{3}=0.$

b) Il suffit de développer.

c) $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{3}\right)\left(z^2 + i\sqrt{3}z - 2\right) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = z_1$ ou $z = z_2$.,

$S_{\mathbb{C}} = \left\{i\sqrt{3}, z_1, z_2\right\}$

d) Puisque $z_1$ et $z_2$ sont des solutions de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc $N_1$ et $N_2$ sont les symétriques respectifs de $M_1$ et $M_2$ par rapport à K.

e) a est la troisième solution de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc $a = i\sqrt{3}$.