

## Section : Sciences techniques

## Épreuve : Mathématiques

## Exercice 1

1)	2)	3)	4)
a	b	b	c

1) Le point I appartient au plan (EFB), qui est parallèle au plan (HGC), d'où la distance du point I au plan (HGC) est la longueur de l'arête du cube. C'est-à-dire la distance du point I au plan (HGC) est égale à 1.

2) S la sphère de centre I et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

La distance du point I au plan (EFH) est égale à  $\frac{1}{2}$ , rayon de la sphère, donc la sphère est tangente au plan (EFH). Par suite l'intersection de cette sphère avec le plan (EFH) est un seul point.

3) Les deux vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\overrightarrow{GB}$  sont colinéaires et de sens contraires. D'autre part  $AH = \sqrt{2}$ , diagonale d'un carré de côté 1.

$$\text{D'où } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = -AH^2 = -2.$$

4)  $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$  est un vecteur normal au plan (EFD).

Le côté [DC] du cube est parallèle au côté [EF], donc le vecteur  $\overrightarrow{DC}$  n'est pas normal au plan (EFD). D'où  $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{DC}$ .

On peut remarquer que le vecteur  $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$  est orthogonal à chacun des deux vecteurs  $\overrightarrow{FD}$  et  $\overrightarrow{FE}$ . Graphiquement, on peut voir que le vecteur  $\overrightarrow{BF}$  n'est pas orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{FD}$ . On peut confirmer cela par le calcul :

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{GD} = 0 + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GD} \neq 0. \text{ Donc } \overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{BF}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AH}.$$

Remarque : Pour les questions 3) et 4), on peut considérer un repère de l'espace et vérifier par le calcul.

## Exercice 2

1) Soit dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E):  $z^2 - (\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$ .

a) Vérifions que 2 est une solution de l'équation (E) :

$$2^2 - 2(\sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2}) + 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 0.$$

D'où 2 est une solution de l'équation (E).

b) Soit  $z_2$  l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$$2 + z_2 = \sqrt{2} + 2 + i\sqrt{2} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

- On peut utiliser le produit des racines :

$$2 \cdot z_2 = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \Rightarrow z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

2) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

A et B les points d'affixes respectives  $z_A = 2$  et  $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .

a)  $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

b) Voir la figure.

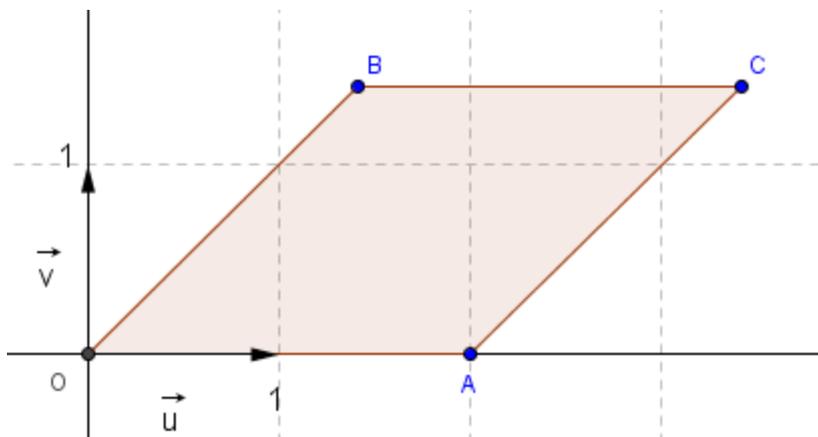
Pour placer le point B, il suffit de remarquer que  $|z_B| = 2$  et  $\arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

Donc B est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et tel que  $(\vec{u}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

3) Soit C le point d'affixe  $z_C = 2 + z_B$ .

a) Voir la figure.

On a  $z_C = 2 + z_B$ , d'où le point C est l'image du point B par la translation de vecteur  $2\vec{u}$ .



b) Montrons que le quadrilatère OACB est un losange :

$$OA = |z_A| = 2 ; OB = |z_B| = 2 ; BC = |z_C - z_B| = |2 + z_B - z_B| = |2| = 2$$

$$\text{et } AC = |z_C - z_A| = |2 + z_B - 2| = |z_B| = 2.$$

On a  $OA = OB = AC = BC$ , d'où  $OACB$  est un losange.

$$c) \left( e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \right) e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8}} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8} + i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8} + i\frac{\pi}{8}} = e^{i \times 0} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$\text{D'où } 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = \left( e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \right) e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

$$d) z_C = 2 + z_B = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left( 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \right) = 2 \left( e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}} \right) e^{i\frac{\pi}{8}} = 2 \left( 2 \cos \frac{\pi}{8} \right) e^{i\frac{\pi}{8}} = 4 \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

$$e) z_C = 4 \cos \frac{\pi}{8} e^{i\frac{\pi}{8}} = 4 \cos \frac{\pi}{8} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 4i \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{D'autre part } z_C = 2 + z_B = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Par identification des deux parties réelles on obtient :  $4 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2}$ .

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} - 1$$

$$= \frac{4 - (2 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

$$\tan^2 \frac{\pi}{8} = 3 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 ; \text{ d'où } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \text{ car on sait que } \tan \frac{\pi}{8} > 0.$$

### Exercice 3

I] Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

Le tableau de variation de  $g$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g$	$+\infty$	$g(0)$	$+\infty$

$$1) g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$$

2) En exploitant le tableau de variation de  $g$  et en tenant compte du fait que  $g(0) = 0$ , on peut conclure que  $g(x) \geq 0$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

II] Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$ .

(C) la courbe représentative  $f$  de dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1)a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} + x - 2 = -\infty$  ; car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$ .

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)e^{-x} + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)e^{-x} + 1 - \frac{2}{x} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , d'où la courbe (C) de  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  $(-\infty)$ .

c) La droite  $\Delta : y = x - 2$ .

$$f(x) - (x-2) = (x+2)e^{-x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} + 2e^{-x} = 0 ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-2) = 0$ , d'où la droite  $\Delta$  est une asymptote à la courbe (C) de  $f$ .

d) On se propose d'étudier la position de la courbe (C) et  $\Delta$ .

$$f(x) - (x-2) = (x+2)e^{-x}.$$

Le signe de  $f(x) - (x-2)$  est celui de  $x+2$ , car  $e^{-x} > 0$ . On a donc :

- Si  $x < -2$  on a  $x+2 < 0$  et  $f(x) - (x-2) < 0$ . Dans ce cas la courbe (C) est au-dessous de  $\Delta$ .
- Si  $x = -2$  on a  $x+2 = 0$  et  $f(x) - (x-2) = 0$ . La courbe (C) coupe  $\Delta$  au point d'abscisse  $(-2)$ .
- Si  $x > -2$  on a  $x+2 > 0$  et  $f(x) - (x-2) > 0$ . Dans ce cas la courbe (C) est au-dessus de  $\Delta$ .

2)a)  $f(x) = (x+2)e^{-x} + x - 2$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} + 1 \\ = e^{-x} - xe^{-x} - 2e^{-x} + 1 \\ = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ = e^{-x}(-x - 1 + e^x) \\ = e^{-x}(e^x - x - 1) = e^{-x}g(x).$$

On a ainsi :  $f'(x) = e^{-x}g(x)$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $f'(x) = e^{-x}g(x)$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . D'où le signe de  $f'$  est celui de  $g$ .

Par suite  $f'(x) \geq 0$  ; pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} + x - 2 = +\infty.$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$+$
$f$			

3)a)  $f'(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} = xe^{-x} ; x \in \mathbb{R}.$$

$f''$  s'annule en changeant de signe en 0, d'où le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Voir la figure.

4) Soit  $\lambda$  un réel strictement supérieur à (-2).

$A(\lambda)$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite  $\Delta$  et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = \lambda$ .

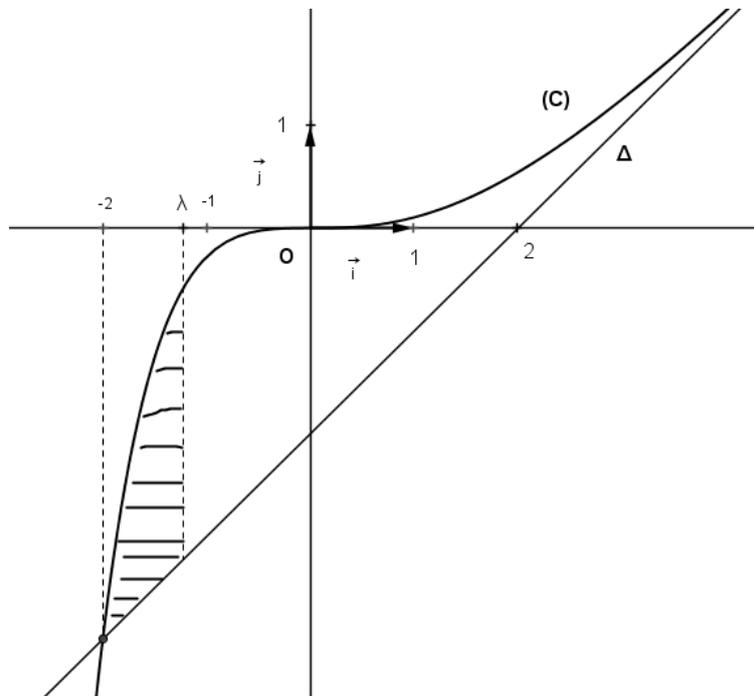
$$a) A(\lambda) = \int_{-2}^{\lambda} (f(x) - (x-2)) dx = \int_{-2}^{\lambda} (x+2)e^{-x} dx.$$

$$\text{On pose : } u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{\lambda} (x+2)e^{-x} dx = \left[ -(x+2)e^{-x} \right]_{-2}^{\lambda} + \int_{-2}^{\lambda} e^{-x} dx \\ &= -(\lambda+2)e^{-\lambda} + \left[ -e^{-x} \right]_{-2}^{\lambda} \\ &= -(\lambda+2)e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e^2 = e^2 - (\lambda+3)e^{-\lambda} \text{ ua.} \end{aligned}$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^2 - (\lambda+3)e^{-\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^2 - \lambda e^{-\lambda} + 3e^{-\lambda} = e^2.$$



#### Exercice 4

Une usine de fabrication de machines effectue deux tests : électrique et mécanique.

- 81% des machines n'ont aucun défaut
- 10% des machines ont un défaut électrique
- Parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique.

E : « la machine présente un défaut électrique »

M : « la machine présente un défaut mécanique »

1)a) On a 10% des machines ont un défaut électrique, d'où  $p(E) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$ .

$\bar{E}$  : « la machine ne présente pas un défaut électrique »

$\bar{M}$  : « la machine ne présente pas un défaut mécanique »

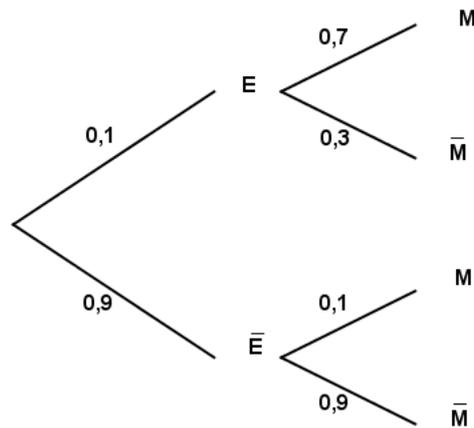
$\bar{E} \cap \bar{M}$  : « la machine ne présente pas un défaut électrique et ne présente pas un défaut mécanique ». C'est-à-dire la machine ne présente aucun défaut.

81% des machines n'ont aucun défaut, d'où  $p(\bar{E} \cap \bar{M}) = \frac{81}{100} = 0,81$ .

b)  $p(E) = 0,1 \Rightarrow p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 0,1 = 0,9$ .

$$p(\bar{M} / \bar{E}) = \frac{p(\bar{E} \cap \bar{M})}{p(\bar{E})} = \frac{0,81}{0,9} = 0,9.$$

2)a) L'arbre pondéré associé à la situation :



b)  $p(M) = p(E).p(M/E) + p(\bar{E}).p(\bar{M}/\bar{E}) = 0,1 \times 0,7 + 0,9 \times 0,1 = 0,16$ .

c) Soit  $p$  la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts.

$$p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M).$$

D'après l'énoncé, parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique. Autrement dit, parmi les machines ayant un défaut électrique 70% ont aussi un défaut mécanique. D'où  $p(E \cap M) = \frac{70}{100} = 0,7$ .

Par suite  $p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M) = 0,1 + 0,16 - 0,7 = 0,19$ .

3) On effectue le contrôle de 20 machines.

$X$  la variable aléatoire donnant le nombre de machines qui présentent au moins un des deux défauts.

a) Le contrôle d'une machine est une épreuve à deux issues contraires : la machine présente au moins un des deux défauts ou la machine ne présente aucun des deux défauts. Le fait de contrôler 20 machines, cela correspond à la répétition de cette épreuve 20 fois. La variable  $X$  joue le rôle d'un compteur des machines ayant au moins l'un des défauts parmi ces 20 machines. D'où  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,19 (la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts).

$$p(X = k) = C_{20}^k (0,19)^k (1 - 0,19)^{20-k} = C_{20}^k (0,19)^k (0,81)^{20-k} ; k \in \{0, 1, \dots, 20\}.$$

b) La probabilité que deux exactement des 20 machines présentent au moins un des deux défauts :

$$p(X = 2) = C_{20}^2 (0,19)^2 (0,81)^{18} = 190 \times (0,19)^2 \times (0,81)^{18} \approx 0,15.$$