Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2014

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

(V_n) la suite géométrique de premier terme $V_0 = \frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

1)a) $V_n = V_0 \times (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{6} \times (\frac{1}{4})^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{6} \times (\frac{1}{4})^n = 0$; car $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{4})^n = 0$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -\frac{23}{6} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n - 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$.

- $U_0 = -\frac{23}{6} > -4$, d'où l'inégalité est vérifiée pour 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire $U_n > -4$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

  $$U_n > -4 \Rightarrow \frac{1}{4}U_n > -1$$
  $$\Rightarrow \frac{1}{4}U_n - 3 > -4$$
  $$\Rightarrow U_{n+1} > -4.$$

  D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n > -4$.

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n - 3 - U_n = -\frac{3}{4}U_n - 3 = -\frac{3}{4}(U_n + 4)$.

c) $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(U_n + 4)$

Or $U_n > -4$, d'où $U_n + 4 > 0$ et $-\frac{3}{4}(U_n + 4) < 0$. Donc $U_{n+1} - U_n < 0$.

Par conséquent la suite (U_n) est décroissante.

On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$. Cela veut dire que la suite est minorée par (-4).

La suite est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

3)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

- $V_0 - U_0 = \frac{1}{6} - \left(-\frac{23}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = \frac{24}{6} = 4.$, d'où l'égalité est vérifiée pour 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons l'égalité est vraie pour n, c'est-à-dire $V_n - U_n = 4$.
- Montrons que l'égalité est vraie pour $n+1$.
  $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{4}V_n - \left(\frac{1}{4}U_n - 3\right) = \frac{1}{4}(V_n - U_n) + 3 = \frac{1}{4} \times 4 + 3 = 4.$

  D'où l'égalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

$V_n - U_n = 4 \Leftrightarrow U_n = V_n - 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n - 4 = -4$; car $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

Exercice 2

Une urne contient : 9 jetons $\begin{cases} 4 \text{ blancs} : 1 ; 2 ; 3 ; 4 \\ 3 \text{ noirs} : 1 ; 2 ; 3 \\ 2 \text{ rouges} : 1 ; 2 \end{cases}$

Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.

1) Le nombre de tirages possibles est $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84.$

a) A : « Les trois jetons tirés sont de même couleur ». C'est-à-dire on a tiré trois jetons blancs ou trois jetons noirs, puisqu'il y a que deux jetons rouges.

$p(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{84} = \frac{4+1}{84} = \frac{5}{84}.$

B : « Les trois jetons tirés portent le même numéro ». C'est-à-dire on a tiré trois jetons portant le numéro 1 ou trois jetons portant le numéro 2, puisqu'il y a que deux jetons qui portent le numéro 3 et un seul jeton qui porte le numéro 4.

$p(B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{84} = \frac{1+1}{84} = \frac{2}{84}.$

b) Pour montrer que les évènements A et B sont incompatibles (c'est-à-dire ils ne peuvent pas se réaliser à la fois), on détermine l'évènement $A \cap B$.

$A \cap B$: «Les trois jetons tirés sont de même couleur et portent le même numéro».

On n'a pas trois jetons de même couleur et qui portent le même numéro, donc l'évènement $A \cap B$ est impossible. D'où les évènements A et B sont incompatibles.

Par conséquent $p(A \cap B) = 0$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{84} + \frac{2}{84} - 0 = \frac{7}{84}.$$

c) C : « Le tirage est tricolore ». C'est-à-dire on a tiré trois couleurs différentes. Autrement dit on a tiré un jeton blanc, un jeton noir et un jeton rouge.

$$p(C) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{84} = \frac{4 \times 3 \times 2}{84} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois jetons, associe le nombre de jetons portant un numéro pair.

On peut répartir les 9 jetons comme suit : 9 jetons $\begin{cases} 4 \text{ pairs} : 2\,;\,2\,;\,2\,;\,4 \\ 5 \text{ impairs} : 1\,;\,1\,;\,1\,;\,3\,;\,3 \end{cases}$

a) Les valeurs possibles prises par X : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

On a :

- $(X = 0)$: Aucun jeton pair n'est tiré.
  Cela veut dire que les trois jetons tirés portent des numéros impairs.
  $p(X = 0) = \dfrac{C_5^3}{84} = \dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}.$
- $(X = 1)$: Un jeton pair et les deux autres sont impairs.
  $p(X = 1) = \dfrac{C_4^1 \times C_5^2}{84} = \dfrac{4 \times 10}{84} = \dfrac{40}{84} = \dfrac{10}{21}.$
- $(X = 2)$: deux jetons pairs et le troisième jeton est impair.
  $p(X = 2) = \dfrac{C_4^2 \times C_5^1}{84} = \dfrac{6 \times 5}{84} = \dfrac{30}{84} = \dfrac{15}{42}.$
- $(X = 3)$: les trois jetons tirés portent des numéros pairs.
  $p(X = 3) = \dfrac{C_4^3}{84} = \dfrac{4}{84} = \dfrac{1}{21}.$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{1}{21}$

b) $E(X) = 0 \times \dfrac{5}{42} + 1 \times \dfrac{10}{21} + 2 \times \dfrac{15}{42} + 3 \times \dfrac{1}{21} = \dfrac{10}{21} + \dfrac{15}{21} + \dfrac{3}{21} = \dfrac{28}{21} = \dfrac{4}{3}.$

Exercice 3

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x\,e^{-x}$.

C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\,e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{x}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{x}}{x}\right)}=0$; car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x}\right)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, d'où C admet une asymptote horizontale d'équation $x=0$.

2)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\,e^{-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,e^{-x}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

D'où la courbe C de f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$.

3)a) $f(x)=2x\,e^{-x}$; $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=2e^{-x}-2x\,e^{-x}=2\,(1-x)e^{-x}$; $x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=0 \iff 2\,(1-x)e^{-x}=0$

$\iff 1-x=0$

$\iff x=1$

- $f'(x)>0 \iff x<1$
- $f'(x)<0 \iff x>1$

c) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$	0

4)a) $f(x)=x \iff 2x\,e^{-x}=x$

$\iff 2x\,e^{-x}-x=0$

$\iff x(2e^{-x}-1)=0$

$\iff x=0$ ou $2e^{-x}-1=0$

$$\Leftrightarrow \ x=0 \ \text{ ou } \ e^{-x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ x=0 \ \text{ ou } \ -x=\text{Log}(\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \ x=0 \ \text{ ou } \ -x=-\text{Log}2$$

$$\Leftrightarrow \ x=0 \ \text{ ou } \ x=\text{Log}2$$

b) Soit Δ la droite d'équation $y=x$.

$$M(x,y)\in\Delta\cap C \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=x \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{ ou } \ x=\text{Log}2 \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(0,0) \text{ ou } M(\text{Log}2,\text{Log}2)$$

D'où la courbe C coupe la droite Δ en deux points $M_1(0,0)$ et $M_2(\text{Log}2,\text{Log}2)$.

5) Voir figure.

6)a) $\int_0^{\text{Log}2} x\,e^{-x}\,dx$.

On pose $u(x)=x \quad \Rightarrow \quad u'(x)=1$

$v'(x)=e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v(x)=-e^{-x}$

$$\int_0^{\text{Log}2} x\,e^{-x}\,dx=\left[-x\,e^{-x}\right]_0^{\text{Log}2}-\int_0^{\text{Log}2}-e^{-x}\,dx$$

$$=\left[-x\,e^{-x}\right]_0^{\text{Log}2}-\left[\ e^{-x}\right]_0^{\text{Log}2}$$

$$=-\text{Log}2\ e^{-\text{Log}2}-\left[e^{-\text{Log}2}-1\right]$$

$$=-\text{Log}2\ e^{\text{Log}\frac{1}{2}}-(e^{\text{Log}\frac{1}{2}}-1)$$

$$=-\frac{1}{2}\text{Log}2-(\frac{1}{2}-1)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\text{Log}2)$$

b) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, la droite et les droites d'équations $x=0$ et $x=\text{Log}2$.

$$A=\int_0^{\mathrm{Log}2}(f(x)-x)\,dx=\int_0^{\mathrm{Log}2}(x\,e^{-x}-x)\,dx$$

$$=\int_0^{\mathrm{Log}2}x\,e^{-x}\,dx-\int_0^{\mathrm{Log}2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(1-\mathrm{Log}\,2)-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\mathrm{Log}2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\mathrm{Log}\,2)-\frac{1}{2}\mathrm{Log}^2\,2$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Log}\,2-\mathrm{Log}^2\,2\right)\text{ unité d'aire.}$$