Session de contrôle Bac 2014

Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$ donc (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$

b) $M(x,y,z) \in (S) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ t^2 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$ or l'équation

$t^2 - 2t + 4 = 0$ n'a pas de solution car $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 > 0$ donc $\Delta \cap (S) = \varnothing$.

3) a) $B \notin \Delta$ donc B et Δ déterminent un plan P.

b) $0+0+3-3=0$ donc le point A appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

$3+0+0-3=0$ donc le point B appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

Soit $C(1,-1,3)$ un point de Δ différent de A et $1-1+3-3=0$ donc le point C appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$ et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P à pour équation $x+y+z-3=0$.

c) $d(I,P) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ donc P et S sont tangent en H, projeté orthogonal de I sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc $D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

$H(x,y,z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ 3\alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, il en résulte que $H(2,0,1)$.

Exercice 2

1) a) $\Delta = 2(1-i)^2 + 16i = 12i = 6(1+i)^2$.

b) $\Delta = 6(1+i)^2$, soit $\delta = \sqrt{6}(1+i)$, $z' = \dfrac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{6}(1+i)}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ et

$z'' = \dfrac{\sqrt{2}(1-i) - \sqrt{6}(1+i)}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6}) - i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$.

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}, \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} \right\}.$$

2) a) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - \sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) - 2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z^2 - 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 2i = -2iz^2 + 2iz - 2i = -2i\left(z^2 - z + 1\right)$.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$,

$\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = 0$ et l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ est une équation de second degré dans $\mathbb{C}$ donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

d) D'après 2)b) z est une solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ si et seulement si $e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ est une solution de (E) et puisque $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, on en déduit que les solutions de (E) sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et comme

$\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) > 0$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) > 0$ donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$ par suite

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Exercice 3

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.1.
La loi de X est donnée par $p(X=k) = C_{20}^{k}(0.1)^k(0.9)^{20-k}$, $k \in \{0,1,........,20\}$.

$p(A) = p(X=0) = (0.9)^{20}$.

b) $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p(A) = 1 - (0.9)^{20}$.

c) Le nombre moyen des vaches qui sont atteintes par la maladie est $E(X) = 20 \times 0.1 = 2$.

2) a) les valeurs prises par Y sont $\{1, 21\}$.

$p(Y=1) = p(A) = (0.9)^{20}$.

$p(Y=21) = p(B) = 1-(0.9)^{20}$.

La loi de Y est donnée dans le tableau suivant :

y_i	1	21
$p(Y=y_i)$	$(0.9)^{20}$	$1-(0.9)^{20}$

b) $E(Y) = \sum_{i=1}^{2} y_i p(Y=y_i) = 1\times(0.9)^{20} + 21\times\left(1-(0.9)^{20}\right) = 18.56$.

Exercice 4

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0.$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{i})$ en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x\left(1-\dfrac{x-1}{x\ln x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{x-1}{x\ln x}\right) = -\infty.$

2) a) $\begin{cases} x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x} \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases}$, il en résulte que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-x+1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}.$

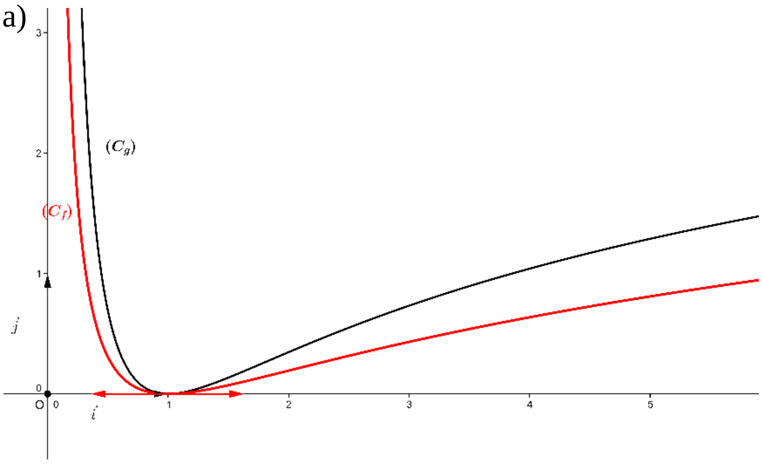
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

3) a) La fonction $g-f$ admet un minimum global sur $]0,+\infty[$ égal à 0 donc pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$. Il en résulte que (C_g) est au-dessus de (C_f).

b) $M(a,f(a))$ et $N(a,g(a))$ donc $MN^2 = (g(a)-f(a))^2$, or $a>1$ donc $0<g(a)-f(a)<1$(d'après le tableau donné) d'où $0<(g(a)-f(a))^2<1$, il en résulte que $MN^2<1$donc $MN<1$.

4) a)



b) pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x - \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln x - \ln x + \left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$= \ln x - \dfrac{\ln x}{x} - \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}.$

c) $A = \int_1^e (g(x)-f(x))dx = \int_1^e \left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)dx = \left[x - \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \left(e-\dfrac{5}{2}\right)$ua.