Examen du baccalauréat - Session de contrôle juin 2014

Section Mathématiques

Épreuve de Mathématiques

Corrigé

Exercice 1

1) Le point O est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO}$, il en résulte que $h(O) = B$.

$\begin{cases} \dfrac{OA}{OI} = 2 \\ \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$, il en résulte que $S(I) = A$.

2) a) On sait que $h(O) = B$ et $S(O) = O$ par suite le point O' est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(O,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

b) On sait que $h(I) = I$ et $S(I) = A$ par suite le point I' est le barycentre des points pondérés $(I,3)$ et $(A,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{II'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

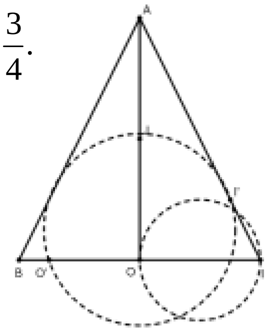
3) a) $h(M) = P \Leftrightarrow \overrightarrow{IP} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow z_P - 1 = 2(z-1) \Leftrightarrow z_P = 2z - 1$.

b) S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui envoie M en Q donc

$z_Q = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z = 2iz$.

c) $f(M) = M'$ donc le point M' est le barycentre des points pondérés $(P,3)$ et $(Q,1)$ on en déduit que

$\overrightarrow{PM'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow z' - z_P = \dfrac{1}{4}(z_Q - z_P) \Leftrightarrow z' = \dfrac{1}{4}(2iz - 2z + 1) + 2z - 1 = \dfrac{3+i}{2}z - \dfrac{3}{4}$.



d) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = \dfrac{3+i}{4} \neq 0$

donc f est une similitude directe, comme $f(O) = O'$ et $f(I) = I'$,

on en déduit que l'image du cercle de diamètre [OI] par f est le cercle de diamètre [O'I'].

Exercice 2

1) a) Une équation de (E) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ donc $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$, on en déduit que

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ par suite les coordonnées des foyers de (E) sont $\left(\sqrt{3},0\right)$ et $\left(-\sqrt{3},0\right)$ et son excentricité

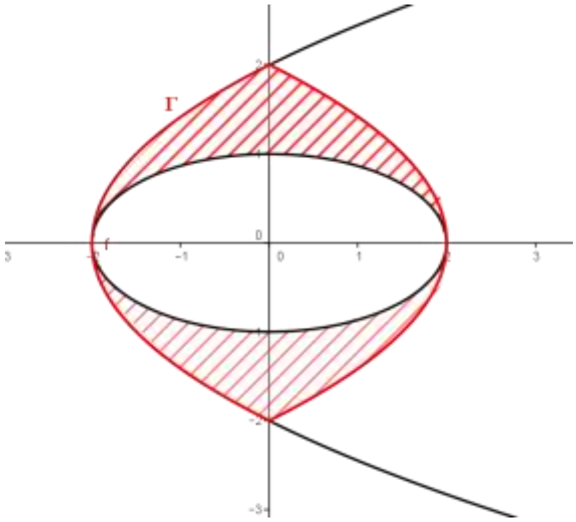
est $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 2(x+2)$. Soit $\Omega(-2,0)$ et on pose $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$.

Dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, $M(X,Y)\in(P)\Leftrightarrow Y^2=2X$, il en résulte que dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et la directrice de (P) a pour équation $X=-\frac{1}{2}$. On en déduit que dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, $F\left(-\frac{3}{2},0\right)$ et la directrice a pour équation $x=-\frac{5}{2}$.

2) a) $M(x,y)\in(\Gamma)\Leftrightarrow y^2=-2|x|+4\Leftrightarrow y^2=-2|-x|+4\Leftrightarrow M(-x,y)\in(\Gamma)$. Il en résulte que $\left(O,\vec{j}\right)$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) $\begin{cases}M(x,y)\in\Gamma\\ x\in[-2,0]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=2x+4\\ x\in[-2,0]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(P)\\ x\in[-2,0]\end{cases}\Leftrightarrow M\in(P_1)$ où (P_1) est la partie de (P) située dans le demi-plan de frontière $\left(O,\vec{j}\right)$ contenant le point de coordonnées $(-2,0)$, il en résulte que $\Gamma=(P_1)\cup(P_2)$ où (P_2) est le symétrique de (P_1) par rapport à $\left(O,\vec{j}\right)$.



3) a) Pour tout $t\in[0,2], t^2+\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2=t^2+4-t^2=4$. Il en résulte que $M\left(t,\sqrt{4-t^2}\right)\in C$.

b) $I_1=\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), les axes du repère et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=2$, on en déduit que $I_1=\frac{\text{Aire du disque de frontière (C)}}{4}=\frac{\pi\times 2^2}{4}=\pi.$

4) $I_2=\int_0^2\sqrt{-2t+4}\,dt=-\frac{1}{2}\int_0^2-2\sqrt{-2t+4}\,dt=-\frac{1}{3}\left[(-2t+4)\sqrt{-2t+4}\right]_0^2=\frac{8}{3}.$

5) Par raison de symétrie, $\frac{1}{4}\mathcal{A}=I_2-\frac{1}{2}I_1$ donc $\mathcal{A}=4I_2-2I_1-=\left(\frac{32}{3}-2\pi\right)$ua

Exercice 3

1) a) $-9\times1111-10^4\times(-1)=-9999+10000=1$ donc $(-9,-1)$ est solution de (E).

b) Le couple $(-9,-1)$ est solution de (E) donc

$1111x-10^4y=1111\times(-9)-10^4\times(-1)$ donc $1111(x+9)=10^4(y+1)\qquad(*)$

donc 1111 divise $10^4(y+1)$ et $1111\wedge10^4=1$ d'où 1111 divise $(y+1)$ par suite il existe un entier k tel que $y+1=1111k$ ou encore $y=1111k-1,\ k\in\mathbb{Z}$.

en remplaçant y par $1111k-1$ dans $(*)$, on obtient $x=10^4k-9$.

Ainsi si le couple (x,y) est solution de (E) alors $x=10^4k-9$ et $y=1111k-1,\ k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $x=10^4k-9$ et $y=1111k-1,\ k\in\mathbb{Z}$, alors $1111\left(10^4k-9\right)-10^4(1111k-1)=1$

On en déduit que $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \left\{ \left(10^4 k - 9 \text{ },1111k - 1\right), k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) a) S'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 10^4 q + 1$, alors
$1111p = 10^4 q + 1 \Leftrightarrow 1111p - 10^4 q = 1$, il en résulte que (p,q) est solution de (E).

b) $\begin{cases} n \equiv 0 (\mathrm{mod} 1111) \\ n \equiv 1 (\mathrm{mod} 10^4) \end{cases} \Leftrightarrow$ il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 10^4 q + 1$, alors d'après a)
(p,q) est solution de (E), il en résulte que $n = 1111(10^4 k - 9) = 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $n = 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \mathbb{Z}$, alors $\begin{cases} n \equiv 0 (\mathrm{mod} 1111) \\ n \equiv 1 (\mathrm{mod} 10^4) \end{cases}$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}} = \left\{ 1111 \times 10^4 k - 9999, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) $\begin{cases} 1111 \times 10^4 k - 9999 \geq 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{9999}{1111 \times 10^4} = 0.0009 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$, soit $k = 1$ donc $n = 11100001$.

Exercice 4

1) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln x$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{f(x)} = 0 = g(0)$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, il en résulte que g est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{f(x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) e^{f(x)} \dfrac{1}{\ln x} = 0 = g'_d(0)$

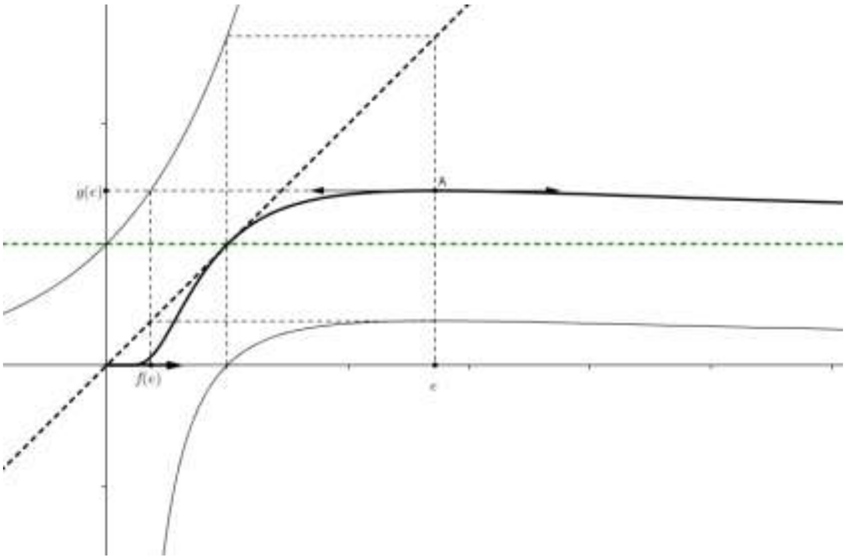
c) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = f'(x) e^{f(x)}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) a) Voir figure.
b) $T : y = g'(1)(x - 1) + g(1) = x$

c)



4) a) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} g(n) = 1$.

b) $u_1 = 1, u_2 = 1.41, u_3 = 1.44$ et pour tout $n \geq 3, u_n \geq u_{n+1}$ car g est décroissante sur $[e,+\infty[$, il en résulte que $u_n = g(n) = \sqrt[n]{n}$ est maximal si et seulement si $n = 3$.