Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2014

Section : Sciences de l'informatique

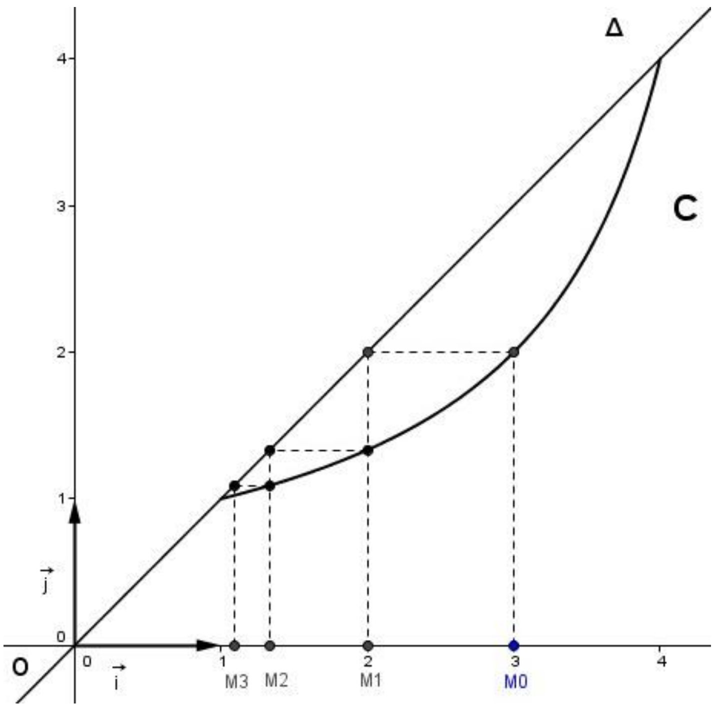
Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1) $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$; $x \in [1,\ 4]$.

(C) la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a)



b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,\ 4]$, d'où $f([1,\ 4]) = [f(1),\ f(4)] = [1,\ 4]$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) On considère les points $M_0(u_0, 0), M_1(u_1, 0), M_2(u_2, 0), M_3(u_3, 0)$.

Voir figure.

b) On remarque que les points $M_k(u_k, 0)$ s'approchent de plus en plus au point $I(1, 0)$, on peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 1.

3)a) Montrons par récurrence que pour tout n, $1 \le u_n \le 4$.

- $1 \le u_0 = 3 \le 4$ d'où l'encadrement est vérifié pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'encadrement est vrai pour n. C'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 4$.
- Montrons que l'encadrement est vrai pour $n+1$.

  On a: $1 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow u_n \in [1,\ 4]$

  $\Rightarrow f(u_n) \in f([1,\ 4])$; $f([1,\ 4]) = [1,\ 4]$

  $\Rightarrow u_{n+1} \in [1,\ 4]$

  $\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 4$

  D'où l'encadrement est vrai pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout n, $1 \leq u_n \leq 4$.

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= \frac{4}{5-u_n} - u_n \\ &= \frac{4 - u_n(5-u_n)}{5-u_n} \\ &= \frac{u_n{}^2 - 5u_n + 4}{5-u_n} \\ &= \frac{(u_n-1)(u_n-4)}{5-u_n}. \end{aligned}$$

On a $1 \leq u_n \leq 4$, d'où $u_n - 1 \geq 0$, $u_n - 4 \leq 0$ et $5 - u_n > 0$.

Par suite $\frac{(u_n-1)(u_n-4)}{5-u_n} \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) On a pour tout n, $1 \leq u_n$. D'où la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

Soit l la limite de cette suite. On a : $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est continue sur $[1,\ 4]$, d'où $l = f(l)$.

$$\begin{aligned} l = f(l) &\Leftrightarrow l = \frac{4}{5-l} \\ &\Leftrightarrow l(5-l) = 4 \\ &\Leftrightarrow l^2 - 5l + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (l-1)(l-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 1 \text{ ou } l = 4 \end{aligned}$$

La suite est décroissante, donc $l = 1$.

Exercice 2

$f(x) = (x-1)e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (l'unité graphique 1 cm).

1)a) La fonction $x \mapsto x-1$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} - e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(2xe^{2x}) - e^{2x} = 0$

D'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe (C) au voisinage de $(-\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{2x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\frac{1}{x})e^{2x} = +\infty$.

D'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow 2x-1=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2)a) T la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = e^2(x-1)$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x > 1 \Leftrightarrow 2x > 2$

$\Leftrightarrow e^{2x} > e^2$

c) $T : y = e^2(x-1)$; $(C) : y = f(x)$.

$f(x) - e^2(x-1) = (x-1)e^{2x} - e^2(x-1) = (x-1)(e^{2x} - e^2)$.

$x > 1 \Rightarrow (x-1 > 0 \text{ et } e^{2x} - e^2 > 0)$

$\Rightarrow f(x) - e^2(x-1) > 0$

$x < 1 \Rightarrow (x-1 < 0 \text{ et } e^{2x} - e^2 < 0)$

$\Rightarrow f(x) - e^2(x-1) > 0$

D'où on a la courbe (C) est toujours au-dessus de sa tangente T

3)a) $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4xe^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Le signe de f'' est celui de $4x$. D'où f'' s'annule en changeant de signe en 0.

Par suite le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe (C).

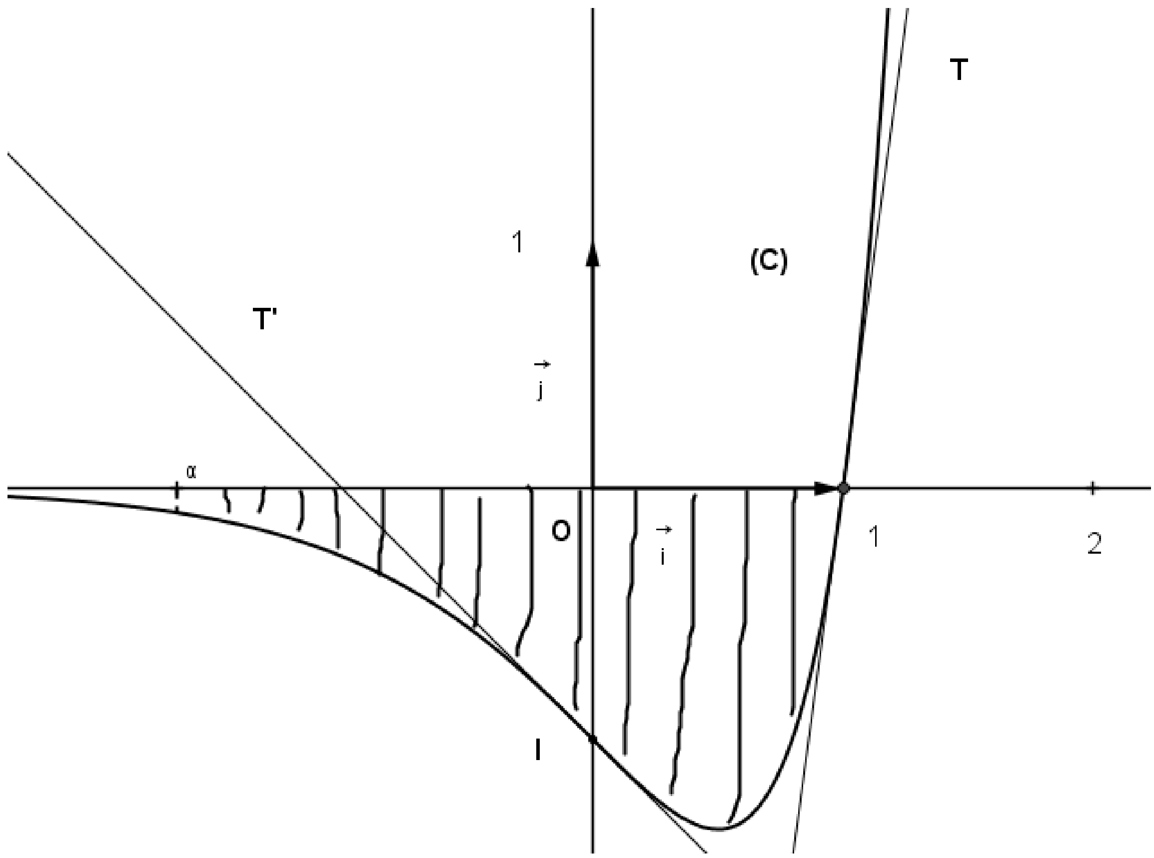
$I(0,-1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) T' la tangente à (C) au point I.

$T' : y = f'(0)x + f(0)$

$y = -x - 1$

4) La courbe (C).



5) Soit α un réel négatif. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a) $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}-f(x)\,dx=-\int_{\alpha}^{1}(x-1)e^{2x}dx.$

On pose $u(x)=x-1 \Rightarrow u'(x)=1$

$v'(x)=e^{2x} \Rightarrow v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\text{D'où } \int_{\alpha}^{1}(x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}(x-1)\,e^{2x}\right]_{\alpha}^{1}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}e^{2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}(\alpha-1)\,e^{2\alpha}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\alpha}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2}(\alpha-1)\,e^{2\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2}-\frac{1}{2}e^{2\alpha}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\alpha\,e^{2\alpha}+\frac{1}{2}e^{2\alpha}-\frac{1}{4}e^{2}+\frac{1}{4}e^{2\alpha}$$

$$=-\frac{1}{2}\alpha\,e^{2\alpha}+\frac{3}{4}e^{2\alpha}-\frac{1}{4}e^{2}$$

D'où $A(\alpha)=-\int_{\alpha}^{1}(x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}\alpha\,e^{2\alpha}-\frac{3}{4}e^{2\alpha}+\frac{e^{2}}{4}$ cm^2.

b) $\lim_{\alpha\to-\infty}A(\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{2}\alpha\,e^{2\alpha}-\frac{3}{4}e^{2\alpha}+\frac{e^{2}}{4}=\frac{e^{2}}{4}$; car $\lim_{\alpha\to-\infty}\alpha\,e^{2\alpha}=0$ et $\lim_{\alpha\to-\infty}e^{2\alpha}=0$.

Exercice 3

On peut résumer les données dans ce schéma :

$$25 \text{ élèves}\begin{cases}15 \text{ filles} & \begin{cases}9 \text{ ont une moyenne en maths supérieure à } 10\\ 6 \text{ ont une moyenne en maths inférieure ou égale à } 10\end{cases}\\ 10 \text{ garçons} & \begin{cases}7 \text{ ont une moyenne en maths supérieure à } 10\\ 3 \text{ ont une moyenne en maths inférieure ou égale à } 10\end{cases}\end{cases}$$

Une épreuve consiste à choisir au hasard deux élèves de cette classe.

Le nombre de choix possibles est $C_{25}^{2}=\frac{25!}{2!23!}=\frac{25\times24}{2}=25\times12=300.$

1) L'évènement A : « Chacun des deux élèves choisis a une moyenne en mathématiques supérieure à 10 »

a) Dans cette classe, il y a 16 élèves qui ont une moyenne en mathématiques supérieure à 10. D'où $p(A)=\frac{C_{16}^{2}}{300}=\frac{120}{300}=\frac{2}{5}.$

b) L'évènement B : « Les deux élèves choisis sont des filles »

Il y a 15 filles dans cette classe. D'où $p(B)=\frac{C_{15}^{2}}{300}=\frac{105}{300}=\frac{7}{20}.$

c) $p(B/A)$: est la probabilité que les deux élèves choisis soient des filles sachant qu'ils ont une moyenne en mathématiques supérieure à 10.

On a $p(B / A)=\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

L'événement $A \cap B$: « Les deux élèves choisis sont des filles qui ont des moyennes en mathématiques supérieures à 10 ». D'où $p(A \cap B)=\dfrac{C_9^2}{300}=\dfrac{36}{300}=\dfrac{3}{25}$.

$$p(B / A)=\frac{p(A \cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{25} \times \frac{5}{2}=\frac{3}{10}.$$

2) X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'élèves ayant une moyenne en mathématiques supérieure à 10, parmi les deux élèves choisis au hasard.

On a $X(\Omega)=\{0,1, 2\}$.

- $(X=0)$: aucun des deux élèves choisis n'a une moyenne en mathématiques supérieure à 10.
  $p(X=0)=\dfrac{C_9^2}{300}=\dfrac{36}{300}=\dfrac{3}{25}$.
- $(X=1)$: l'un seulement des deux élèves choisis a une moyenne en mathématiques supérieure à 10.
  $p(X=1)=\dfrac{C_{16}^1 \times C_9^1}{300}=\dfrac{16 \times 9}{300}=\dfrac{12}{25}$.
- $(X=2)$: Chacun des deux élèves choisis, a une moyenne en mathématiques supérieure à 10.
  $p(X=2)=\dfrac{C_{16}^2}{300}=\dfrac{120}{300}=\dfrac{10}{25}$.

La loi de probabilité de X se résume dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{10}{25}$

3) On répète l'épreuve suivante cinq fois de suite.

On se propose de déterminer la probabilité que l'évènement A soit réalisé au moins trois fois. Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois que l'événement soit réalisé. Y suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\dfrac{2}{5}$.

$$p(Y=k)=C_5^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{5-k} \; ; \; k \in\{0,1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$(Y \geq 3)$: L'évènement A est réalisé au moins trois fois.

$$p(Y \geq 3) = p(Y=3) + p(Y=4) + p(Y=5)$$
$$= C_5^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right) + C_5^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$$
$$= 10\times\frac{2^3\times 3^2}{5^5} + 5\times\frac{2^4\times 3}{5^5} + \frac{2^5}{5^5} = \frac{(10\times 2^3\times 3^2)+(5\times 2^4\times 3)+2^5}{5^5} = \frac{992}{3125}$$

Exercice 4

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-4) - 2\times(-3) = -2.$$

$\text{dét}(A) \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$A\times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\times I_3.$$

$$A\times B = 2\times I_3 \Leftrightarrow A\times\left(\frac{1}{2}B\right) = I_3.$$

D'où la matrice inverse de A est la matrice $A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3)a) Pour un séjour de 24 heures, un hôtel a trois tarifs différents :

- Le tarif x pour les enfants de moins 12 ans.
- Le tarif y pour les enfants de 12 à 18 ans.
- Le tarif z pour les personnes de plus de 18 ans.

Trois familles ont passé un séjour de 24 heures dans cet hôtel.

Famille 1, a payé 200 dinars et elle est composée du père de la mère et de 3 enfants d'âges 7, 10 et 15. On a donc : $2x + y + 2z = 200$.

Famille 2, a payé 290 dinars et elle est composée du père de la mère et de 5 enfants d'âges 4, 8, 13, 15 et 18. On a donc : $2x + 2y + 3z = 290$.

Famille 3, a payé 130 dinars et elle est composée de la mère et de deux enfants de 13 et 16 ans. On a donc : $2y + z = 130$.

On a ainsi le système (S) $\begin{cases} 2x+y+2z=200 \\ 2x+2y+3z=290 \\ 2y+z=130 \end{cases}$

b)

$$(S)\begin{cases} 2x+y+2z=200 \\ 2x+2y+3z=290 \\ 2y+z=130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\times\begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 200 \\ 290 \\ 130 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2\times 200 - \frac{3}{2}\times 290 + \frac{1}{2}\times 130 = 30 \\ y = 200 - 290 + 130 = 40 \\ z = -2\times 200 + 2\times 290 - 130 = 50 \end{cases}$$

D'où les tarifs sont : $x = 30$ dinars, $y = 40$ dinars et $z = 50$ dinars.