Corrigé

Exercice 1

1. **Faux** : car

$\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=\left\|2\overrightarrow{IC}\wedge 2\overrightarrow{ID}\right\|=4\left\|\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{ID}\right\|=4\left|IC\times ID\times\sin\left(\widehat{DIC}\right)\right|=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\right)=2$ par contre $\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=1$

2. **Vrai**: En effet , les vecteurs $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires donc $\left(\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ}=\det\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IJ}\right)=0.$

3. **Faux** : car la sphère de diamètre [AC] est de centre I donc son rayon est égal à $\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la distance du point I au plan $z-1=0$ est égale à $IJ=1>\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'intersection de la sphère et le plan est vide.

Exercice 2

I. 1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=3x^2+6>0.$ Ainsi f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=\left]\lim_{-\infty}f,\lim_{+\infty}f\right[=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$.

$0\in\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha)=0$. Il en résulte que l'équation $x^3+6x+2=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

2) $\begin{array}{l} f(-0.4)=-0.464<0 \\ f(-0.3)=0.173>0 \end{array}$, $f(-0.4)\times f(-0.3)<0$ donc $-0.4<\alpha<-0.3$.

II. 1) a) $z^3=2\Leftrightarrow z^3=2e^{i0}\Leftrightarrow z_k=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k\in\{0,1,2\}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_1) sont $a_1=z_0=\sqrt[3]{2}e^{i0}=\sqrt[3]{2},\ a_2=z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3=z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) $z^3=-4\Leftrightarrow z^3=4e^{i\pi}\Leftrightarrow z_k=\sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_2) sont $b_1=z_1=\sqrt[3]{4}e^{i\pi}=-\sqrt[3]{4},\ b_2=z_0=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3=z_2=\sqrt[3]{4}e^{i\frac{5\pi}{3}}=\sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$a_1b_1 = -\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{8} = -2$

c) $a_2b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{8} = -2$. Ainsi $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2.$

$a_3b_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{8}e^{i(-\pi)} = -\sqrt[3]{8} = -2$

2) a) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -2 - 6(a+b).$

b) On sait que $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b) \Leftrightarrow (a+b)^3 + 6(a+b) + 2 = 0$, il en résulte que $(a+b)$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0.$

3) On sait que $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2$ et $a_1^3 + b_1^3 = a_2^3 + b_2^3 = a_3^3 + b_3^3 = -2$ donc d'après 2)b)

$a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$ et $a_3 + b_3$ sont des solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$, or l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ est de troisième degré donc elle admet dans $\mathbb{C}$ au plus trois solutions.

On en déduit que les solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ sont :

$a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, $a_2 + b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3 + b_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} + \sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) L'unique solution réelle de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$ est $a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, d'où $a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ il en résulte que $\alpha = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}.$

Exercice 3

1) Puisque le nombre de mouches après 69 jours est 1034 et il reste le même après 75 jours, il semble alors que le nombre de mouche resterait constant (c'est-à dire 1034) après 85 jours.

2) a) $r = \dfrac{\mathrm{cov}(T,M)}{\sigma_T\sigma_M} = -0.996.$

b) $M = aT + b$ avec $a = \dfrac{\mathrm{cov}(T,M)}{\sigma_T^2} = -0.155$ et $b = \overline{M} - a\overline{T} = 4.036.$ Ainsi $M = -0.155T + 4.036.$

3) a) On sait que $M = \ln\left(\dfrac{1035}{N} - 1\right) \Leftrightarrow \dfrac{1035}{N} - 1 = e^M \Leftrightarrow \dfrac{1035}{N} = e^M + 1 \Leftrightarrow N = \dfrac{1035}{e^M + 1}.$

b) D'après 2)b) $M = -0.155T + 4.036$ et d'après 3)a) $N = \dfrac{1035}{e^M + 1}$, il en résulte que

$$N=\frac{1035}{e^{-0.155T+4.036}+1}=\frac{1035}{1+e^{4.036}e^{-0.155T}}$$. Ainsi $\alpha=e^{4.036}$ et $\beta=-0.155$.

c) En changeant T par 85, on obtient $N=\frac{1035}{1+e^{4.036}e^{-0.155\times 85}}=1034,8\simeq 1034$ mouches, on peut donc valider la conjecture émise en 1).

Exercice 4

1) Voir figure.

2) a) $f(5)=\ln\left(5+\sqrt{25-9}\right)=\ln(9)=\ln\left(3^2\right)=2\ln 3.$

b) Voir figure.

c) $A_{MPNQ}=MP\times PN=(5-3)\left(f(5)-\ln 3\right)=2\left(2\ln 3-\ln 3\right)=2\ln 3.$

$$A_{MPN}=\frac{MP\times PN}{2}=\frac{2\ln 3}{2}=\ln 3.$$

d) $A_{MPN}\leq A\leq A_{MPNQ}$ donc $\ln 3\leq A\leq 2\ln 3.$

3) a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+9}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f\left([3,+\infty[\right)=\left[f(3),\lim\limits_{+\infty}f\right[=[\ln 3,+\infty[.$

4) C_g est le symétrique de C_f par rapport à la droite $y=x$ (voir figure).

5) a) Voir figure.

b) On considère les points $M'(\ln 3,0)$, $Q'(2\ln 3,0)$, $N'(2\ln 3,5)$ et $P'(\ln 3,5)$ et on désigne par $A_{M'Q'N'P'}$ l'aire du rectangle M'Q'N'P' et par B l'aire de la partie du plan limitée par C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\ln 3$ et $x=2\ln 3$.

$A'=A_{M'Q'N'P'}-B.$ Or $A_{M'Q'N'P'}=M'P'\times M'Q'=5\left(2\ln 3-\ln 3\right)=5\ln 3$ et $B=\int_{\ln 3}^{2\ln 3}g(x)dx$, on en déduit que $A'=5\ln 3-\int_{\ln 3}^{2\ln 3}g(x)dx.$

6) a) Pour tout $x \in [\ln 3, +\infty[$ et $y \in [3, +\infty[$

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 9}\right) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 9} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = (e^x - y)^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = e^{2x} - 2ye^x + y^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ye^x = e^{2x} + 9 \\ e^x \geq y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^{2x} + 9}{2e^x} \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2} \\ e^x \geq y \end{cases}$$

. On en déduit que pour tout

$x \in [\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2}$.

b) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^x - 9e^{-x}}{2}\right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = 4$ donc $A' = (5\ln 3 - 4)\,u.a$ et puisque E et E' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, il en résulte que $A = A' = (5\ln 3 - 4)\,u.a.$