

|  |                                |
|--|--------------------------------|
| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>♦♦♦<br><b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br><b>SESSION DE JUIN 2013</b> | Epreuve : <b>MATHEMATIQUES</b> |
|  | Durée : 3 H                    |
|  | Coefficient : 3                |
| Section : <b>Sciences expérimentales</b>   | <b>SESSION PRINCIPALE</b>      |

Le sujet comporte 4 pages. La page 4 / 4 est à rendre avec la copie.

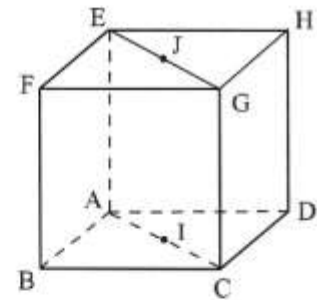
### Exercice 1 (3 points)

Dans la figure ci - contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Le point I est le milieu du segment  $[AC]$ .

Le point J est le milieu du segment  $[EG]$ .

L'espace est muni du repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .



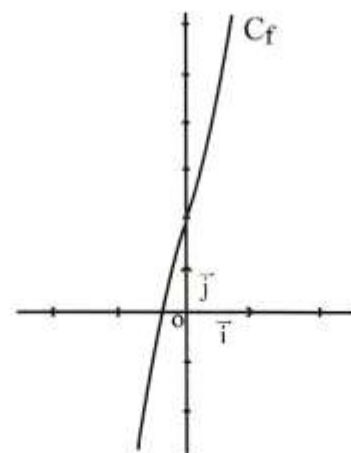
Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

- 1)  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$ .
- 2)  $(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}) \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$ .
- 3) La sphère de diamètre  $[AC]$  est tangente au plan d'équation  $z - 1 = 0$ .

### Exercice 2 (6 points)

I. Dans la figure ci - contre, on a représenté dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $C_f$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 6x + 2$ .

- 1) Justifier que l'équation  $x^3 + 6x + 2 = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$ .
- 2) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .



II. On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de  $\alpha$ .

1) On considère dans  $\mathbb{C}$  les équations  $(E_1): z^3 = 2$  et  $(E_2): z^3 = -4$ .

a) Justifier que les solutions de  $(E_1)$  sont  $a_1 = \sqrt[3]{2}$ ,  $a_2 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $a_3 = \sqrt[3]{2} e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$ .

b) Justifier que les solutions de  $(E_2)$  sont  $b_1 = -\sqrt[3]{4}$ ,  $b_2 = \sqrt[3]{4} e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $b_3 = \sqrt[3]{4} e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ .

c) Vérifier que  $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = -2$ .

2) Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes vérifiant  $a^3 + b^3 = -2$  et  $ab = -2$ .

a) Vérifier que  $(a + b)^3 = -2 - 6(a + b)$ .

b) En déduire que  $a + b$  est une solution de l'équation  $z^3 + 6z + 2 = 0$ .

3) Déduire les solutions de l'équation  $z^3 + 6z + 2 = 0$ .

4) Conclure.

### Exercice 3 (5 points)

Une étude a été faite sur une population de 22 mouches se reproduisant assez rapidement.

Le tableau suivant donne le nombre  $N$  de mouches après un temps  $T$  exprimé en jours.

|   |    |    |     |     |     |     |     |      |      |      |      |      |
|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| T | 0  | 9  | 12  | 18  | 25  | 33  | 39  | 48   | 57   | 66   | 69   | 75   |
| N | 22 | 39 | 105 | 225 | 499 | 791 | 938 | 1005 | 1028 | 1033 | 1034 | 1034 |

1) Quelle conjecture peut-on émettre sur le nombre de mouches au bout de 85 jours ?

2) On pose  $M = \ln\left(\frac{1035}{N} - 1\right)$ .

Les valeurs de  $M$ , arrondies à  $10^{-3}$  près, sont données dans le tableau suivant :

|   |       |       |       |       |       |        |        |        |        |        |        |        |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| T | 0     | 9     | 12    | 18    | 25    | 33     | 39     | 48     | 57     | 66     | 69     | 75     |
| M | 3.830 | 3.240 | 2.181 | 1.281 | 0.072 | -1.176 | -2.269 | -3.512 | -4.989 | -6.247 | -6.941 | -6.941 |

a) Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près du coefficient de corrélation linéaire entre  $T$  et  $M$ .

b) Donner une équation de la droite de régression de  $M$  en  $T$ . (les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$  près).

3) a) Montrer que  $N = \frac{1035}{1 + e^M}$ .

b) Déduire que  $N = \frac{1035}{1 + \alpha e^{-\beta T}}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels positifs que l'on déterminera.

4) En utilisant la question 3) b), valider ou réfuter la conjecture  mise en 1).

#### Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé et  $C_f$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[3, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9})$ .

Soit  $E$  la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$  et les droites d'équations  $x = 3$ ,  $x = 5$  et  $y = \ln 3$ . On désigne par  $A$  l'aire (en unité d'aire) de  $E$ .

1) Hachurer  $E$ .

2) a) Vérifier que  $f(5) = 2\ln 3$ .

b) Soit  $M$  et  $N$  les points de la courbe  $C_f$  d'abscisses respectives 3 et 5 et  $P$  et  $Q$  les points de coordonnées respectives  $(5, \ln 3)$  et  $(3, 2\ln 3)$ .

Placer, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les points  $M, N, P$  et  $Q$ .

c) Calculer l'aire du rectangle  $MPNQ$  et l'aire du triangle  $MPN$ .

d) En déduire que  $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3$ .

3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) En utilisant le graphique, justifier que  $f$  réalise une bijection de  $[3, +\infty[$  sur l'intervalle  $[\ln 3, +\infty[$ .

4) Soit  $g$  la fonction réciproque de la fonction  $f$  et  $C_g$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
Tracer la courbe  $C_g$ .

5) Soit  $E'$  la partie du plan limitée par la courbe  $C_g$  et les droites d'équations  $x = \ln 3$ ,  $x = 2\ln 3$  et  $y = 5$ . On désigne par  $A'$  l'aire (en unité d'aire) de  $E'$ .

a) Hachurer  $E'$ .

b) Montrer que  $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x) dx$ .

6) a) Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[\ln 3, +\infty[$ ,  $g(x) = \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}$ .

b) Calculer  $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x) dx$  et en déduire la valeur de  $A$ .