Section: **MATHEMATIQUES**	**SESSION PRINCIPALE**

Corrigé

Exercice 1

1. (A_1) **Vrai**: en effet si $33n \equiv 0 (\text{mod}\, 2013)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $33n = 2013k = 61 \times 33k$ alors $n = 61k$ ou encore $n \equiv 0 (\text{mod}\, 61)$.

   (A_2) **Vrai**: en effet $33 \wedge 11 = 11$ et 11 divise 2013. Ainsi l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. (A_3) **Vrai :** en effet : $\begin{cases} u : x \mapsto \ln x \text{ est définie et dérivable sur }]0,+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc elle est continue sur } u(]0,+\infty[) \\ 1 \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

   (A_3) **Faux** : car pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1+(\ln x)^2} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.

Exercice 2

A. 1) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Le rapport de f est $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = 2$.

2) a) Le triangle OAB est rectangle en B et de sens direct donc son image par f est un triangle rectangle en f (B) et de sens direct. Or $f(O) = O$, $f(B) = A$ et $f(A) = C$, il en résulte que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et $\dfrac{AC}{AB} = 2$ donc $AC = 2AB$.

b) Voir figure.

B. 1) a) On sait que g (A) = C et g (B) = A donc le rapport de g est $\dfrac{AC}{AB} = 2$ donc $g \circ g = h_{(\Omega,4)}$ or $g \circ g(B) = C$, il en résulte que $h_{(\Omega,4)}(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

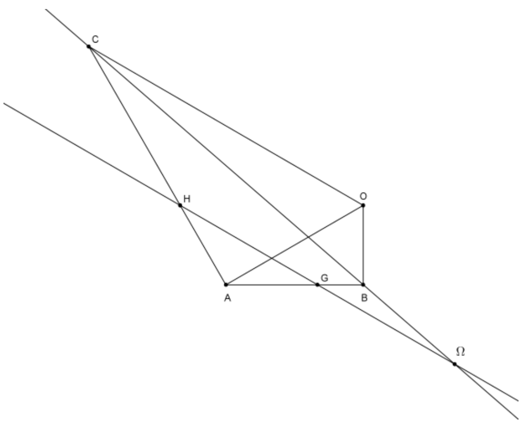
b) Puisque $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$ donc Ω est le barycentre des points pondérés $(C,1)$ et $(B,-4)$ d'où $\overrightarrow{C\Omega} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CB}$.

2) a) G est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,2)$ d'où $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et puisque g (G) = H, g (A) = C et g (B) = A, on en déduit que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) D'après a) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega C}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + 4\overrightarrow{\Omega B}) = \overrightarrow{\Omega B}$.

On a $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $-\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{\Omega G}$, il en résulte que G est le milieu de $[\Omega H]$.

c) G est le milieu de $[\Omega H]$ donc $\overrightarrow{\Omega H} = 2\overrightarrow{\Omega G}$ et g est une similitude indirecte de centre Ω, de rapport 2 et g (G) = H d'où l'axe de g est (GH).



Exercice 3

1. a) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   b) Le vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc les points I, J et K ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan

   P. $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à P donc $P: x-y+z+d=0$ et $I\in P$ donc $d=0$, on en déduit que

   $P: x-y+z=0$.

2. $v=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|$, $\overrightarrow{IS}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}=3$ Il en résulte que $v=\frac{1}{2}$.

3. a) $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{IJ}\right)=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.

   b) $\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MS}=\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)=\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{IS}=\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{IS}$

   $=\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}$. On en déduit que SMJK et SIJK ont le même volume d'où le volume de SMJK est $\frac{1}{2}$.

4. a) h(P) = P' donc P et P' sont parallèles donc $P': x-y+z+d=0$. Soit I'(x,y,z) = h(I) donc

   $\overrightarrow{SI'}=2\overrightarrow{SI}$ donc $\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ on en déduit que $I'(1,3,-1)$, or $I'\in P'$ donc $d=3$. Ainsi $P': x-y+z+3=0$.

   b) On sait que $M\in(SM)\cap P$ donc $h(M)\in h((SM))\cap h(P)$ donc $h(M)\in(SM)\cap P'=\{M'\}$, d'où $h(M)=M'$ on montre de même que $h(J)=J'$ et $h(K)=K'$ et puisque $h(S)=S$, il en résulte que

   h(SMJK)=SM'J'K' donc le volume de SM'J'K' est $2^3\times\frac{1}{2}=4$.

   Le volume du solide MJKM'J'K' = $V_{SM'J'K'}-V_{SMJK}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Exercice 4

1. a) $\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)=1+e^{i\theta}-1=e^{i\theta}$ et $\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)=i+ie^{i\theta}-i=ie^{i\theta}$.

   b) $EM=\left|e^{i\theta}\right|=1$ donc M varie sur C_1 et $FN=\left|ie^{i\theta}\right|=1$ donc N varie sur C_2.

   c) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}=i$ imaginaire donc $\overrightarrow{FN}\perp\overrightarrow{EM}$ d'où les droites (FN) et (EM) sont perpendiculaires.

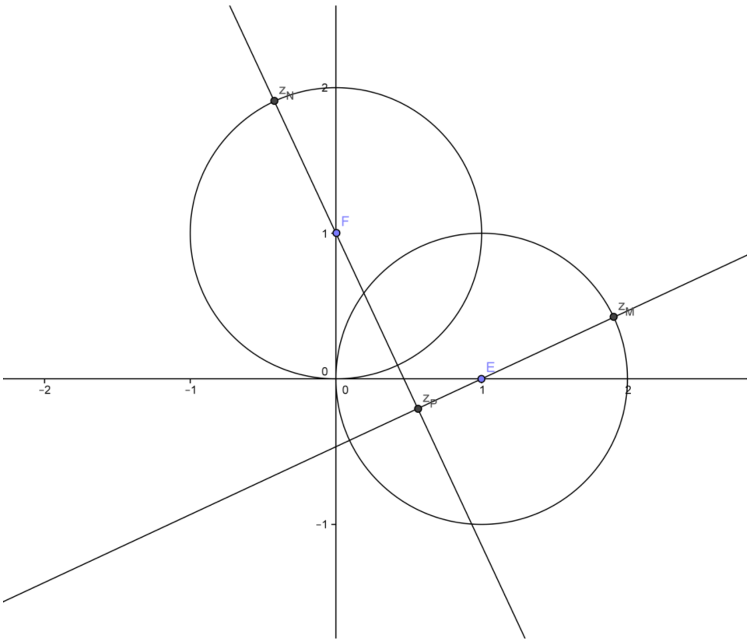
2. a) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\dfrac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}}=(1-i)\sin\theta-e^{-i\theta}=\sin\theta-i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta=\sin\theta-\cos\theta$.

$$\frac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}=\frac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta}-i}{i+ie^{i\theta}-i}=(-1-i)\sin\theta-e^{-i\theta}=-\sin\theta-i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta=-\sin\theta-\cos\theta.$$

b) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\sin\theta-\cos\theta$ est réel donc (EP) et (EM) sont parallèles donc E, P et M sont alignés

$\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}=-\sin\theta-\cos\theta$ est réel donc (FP) et (FN) sont parallèles donc F, P et N sont alignés

Ainsi P est le point d'intersection de (FN) et (EM).



Exercice 5

I. 1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=0$. Les droites y = 0 et y = 1 sont des asymptotes de C_φ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{e^x-1}=-\infty$. La droite x = 0 est une asymptote de C_φ

c) Pour tout réel x non nul, $\varphi'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^{2x}}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$

2. Pour tout réel x non nul, $\varphi(x)=x\Leftrightarrow\varphi(x)-x=0$, on pose $h(x)=\varphi(x)-x$

La fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et $h'(x)=\varphi'(x)-1<0$ pour tout réel x non nul.

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ (resp $]0,+\infty[$) donc elle réalise une bijection de

$]-\infty,0[$ (resp $]0,+\infty[$) sur $h(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$ (resp $h(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$), $0\in\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha\in]-\infty,0[$

(resp $\beta\in]0,+\infty[$) tel que $h(\alpha)=0\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=\alpha$ (resp $h(\beta)=0\Leftrightarrow\varphi(\beta)=\beta$). On en déduit que l'équation

$\varphi(x)=x$ admet exactement deux solutions $\alpha\in]-\infty,0[$ et $\beta\in]0,+\infty[$

II. 1)a) $\Delta_a : y=f'(a)(x-a)+f(a)$ donc $\Delta_a : y=(e^a-1)(x-a)+e^a-a$ d'où $\Delta_a : y=(e^a-1)x+(1-a)e^a$.

$D_b : y=g'(b)(x-b)+g(b)$ donc $D_b : y=\left(-1+\dfrac{1}{b}\right)(x-b)+1-b+\ln b$ d'où $D_b : y=\left(-1+\dfrac{1}{b}\right)x+\ln b$.

b) (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si $(f'(a)=g'(b))$ si et seulement si ($-1+\dfrac{1}{b}=e^a-1$)

si et seulement si ($\dfrac{1}{b}=e^a$) si et seulement si ($b=e^{-a}$).

2) a) Δ_a et D_b étant parallèles donc

(Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si $\begin{cases}(1-a)e^a=\ln b\\ b=e^{-a}\end{cases}$ si et seulement si ($(1-a)e^a=-a$) si et seulement si

($a(e^a-1)=e^a$) si et seulement si ($a\neq 0$ et $a=\dfrac{e^a}{e^a-1}$).

b) d'après 2) a) Δ_a et D_b sont confondues alors $\varphi(a)=a$ or $\varphi(\alpha)=\alpha$ ($\alpha\neq 0$) donc Δ_α est une tangente commune à C_f et C_g en A (α , f (α)) et en B (b , g (b)) or $b=e^{-\alpha}$ d'après (II ; 1) a)) donc B($e^{-\alpha}$, $g(e^{-\alpha})$) .

c) On a aussi $\varphi(\beta)=\beta$ signifie $\beta=\dfrac{e^{\beta}}{e^{\beta}-1}$, Δ_β est une tangente commune à C_f et à C_g respectivement en A'(β, f (β)) et B'($e^{-\beta}$; $g(e^{-\beta})$).

3) a) Voir figure.

b) $f(-\alpha)-\alpha=e^{-\alpha}-(-\alpha)-\alpha=e^{-\alpha}$

c) Voir figure.