Mathématiques
Section Sport
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

(U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{5}U_n - 3 \ ; \text{pour tout } n \in \text{IN} \end{cases}$

1) $U_0 = 10$.

$U_1 = \dfrac{3}{5}U_0 - 3 = \dfrac{3}{5}\times 10 - 3 = 3$; $U_2 = \dfrac{3}{5}U_1 - 3 = \dfrac{3}{5}\times 3 - 3 = \dfrac{9}{5} - \dfrac{15}{5} = -\dfrac{6}{5}$.

$U_1 - U_0 = 3 - 10 = -7$; $U_2 - U_1 = -\dfrac{6}{5} - 3 = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{15}{5} = -\dfrac{21}{5}$.

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ d'où la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

$\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{3}{10}$; $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{-\frac{6}{5}}{3} = -\dfrac{6}{5}\times\dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{5}$.

$\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$, d'où la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2)a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > -\dfrac{15}{2}$.

- $U_0 = 10$; $U_0 > -\dfrac{15}{2}$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit p un entier naturel.

  On suppose que l'inégalité est vraie pour p, c'est à dire $U_p > -\dfrac{15}{2}$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $p+1$.

$$\begin{aligned} U_p > -\frac{15}{2} &\Rightarrow \frac{3}{5}U_p > \frac{3}{5}\times\left(-\frac{15}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{3}{5}U_p > -\frac{9}{2} \\ &\Rightarrow \frac{3}{5}U_p - 3 > -\frac{9}{2} - 3 \\ &\Rightarrow U_{p+1} > -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour $p+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, $U_n > -\dfrac{15}{2}$.

b) Montrons que la suite (U_n) est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n - 3 - U_n = (\frac{3}{5} - 1)U_n - 3 = -\frac{2}{5}U_n - 3 = -\frac{2}{5}(U_n + \frac{15}{2}).$$

On a : $U_n > -\frac{15}{2} \Rightarrow U_n + \frac{15}{2} > 0$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5}(U_n + \frac{15}{2}) < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < U_n$$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

c) la suite (U_n) est décroissante et minorée (par $-\frac{15}{2}$), donc elle converge.

3) (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = U_n + \frac{15}{2}$.

a) $V_0 = U_0 + \frac{15}{2} = 10 + \frac{15}{2} = \frac{35}{2}$.

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{15}{2} = \frac{3}{5}U_n - 3 + \frac{15}{2} = \frac{3}{5}U_n + \frac{9}{2} = \frac{3}{5}(U_n + \frac{15}{2}) = \frac{3}{5}V_n.$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{35}{2}$.

b) (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{35}{2}$, d'où le terme général de la suite (V_n) est : $V_n = V_0 + (\frac{3}{5})^n$; $n \in \mathbb{N}$.

$$V_n = U_n + \frac{15}{2} \Leftrightarrow U_n = V_n - \frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{35}{2} + (\frac{3}{5})^n - \frac{15}{2} = 10 + (\frac{3}{5})^n.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} 10 + (\frac{3}{5})^n = 10$, car $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3}{5})^n = 0$.

Exercice 2

$$8 \text{ jetons} : \begin{cases} 4B : 1 ; 1 ; 2 ; 2 \\ 3N : 1 ; 1 ; 2 \\ 1J : -1 \end{cases}$$

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.

1) L'univers Ω des cas possibles est donc les combinaisons de 2 jetons parmi les 8 jetons.

$$\text{Card}\Omega = C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28.$$

A : « Obtenir deux jetons de même couleur ».

Cela revient à tirer deux jetons blancs ou deux jetons noirs.

$p(A)=\dfrac{C_4^2+C_3^2}{28}=\dfrac{6+3}{28}=\dfrac{9}{28}.$

B : « Obtenir deux jetons dont le produit des numéros est négatif ».

Cela revient à tirer nécessairement le jeton jaune et un autre jeton quelconque.

$p(B)=\dfrac{C_1^1\times C_7^1}{28}=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}.$

2) On sait que $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B).$ On a calculé $p(A)$ et $p(B)$ calculons $p(A\cap B).$

$A\cap B$: « Obtenir deux jetons de même couleur dont le produit des numéros est négatif »

Cela est impossible car le seul jeton qui porte un numéro négatif est le jeton jaune, donc on ne peut pas avoir deux jetons de même couleur et dont le produit des numéros est négatif.

$p(A\cap B)=p(\varnothing)=0.$

D'où $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\dfrac{9}{28}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{16}{28}=\dfrac{4}{7}.$

3) X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés. On a $X(\Omega)=\{-2,-1,1,2,4\}.$

a) $(X=-1)$: « le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés est égal à (-1) ».

Cela revient à tirer nécessairement le jeton jaune et un jeton qui porte le numéro 1.

$p(X=-1)=\dfrac{C_1^1\times C_4^1}{28}=\dfrac{4}{28}=\dfrac{1}{7}.$

b) Pour compléter le tableau, on doit calculer les probabilités $p(X=x_i)$; $x_i\in X(\Omega).$

$(X=-2)$: « le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés est égal à (-2) »

Cela revient à tirer nécessairement le jeton jaune et un jeton qui porte le numéro 2.

$p(X=-2)=\dfrac{C_1^1\times C_3^1}{28}=\dfrac{3}{28}.$

$(X=1)$: « le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés est égal à 1 »

Cela revient à tirer nécessairement deux jetons portant le numéro 1.

$p(X=1)=\dfrac{C_4^2}{28}=\dfrac{6}{28}=\dfrac{3}{14}.$

$(X=2)$: « le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés est égal à 2 »

Cela revient à tirer un jeton portant le numéro 1 et un jeton qui porte le numéro 2.

$p(X=2)=\dfrac{C_4^1\times C_3^1}{28}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7}.$

$(X=4)$: « le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés est égal à 4 »

Cela revient à tirer nécessairement deux jetons portant le numéro 2.

$p(X=4)=\dfrac{C_3^2}{28}=\dfrac{3}{28}.$

On résume ces probabilités dans le tableau suivant, qui donne la loi de probabilité de X :

x_i	-2	-1	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{3}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{28}$

c) $E(X)=(-2)\times\frac{3}{28}+(-1)\times\frac{1}{7}+1\times\frac{3}{14}+2\times\frac{3}{7}+4\times\frac{3}{28}=\frac{32}{28}=\frac{8}{7}.$

Exercice 3

$f(x)=2x+e^{-2x}$; $x\in\mathbb{R}$.

1)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+e^{-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\left[1-\frac{e^{-2x}}{(-2x)}\right]=+\infty$; car $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{e^{-2x}}{(-2x)}=-\infty$

$f'(x)=2-2e^{-2x}=2(1-e^{-2x})$; $x\in\mathbb{R}$.

$f'(0)=0.$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^{-2x}>0$

$\Leftrightarrow e^{-2x}<1$ D'où le signe de $f'(x)$.

$\Leftrightarrow -2x<0$

$\Leftrightarrow x>0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+e^{-2x}=+\infty$; $f(0)=1.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

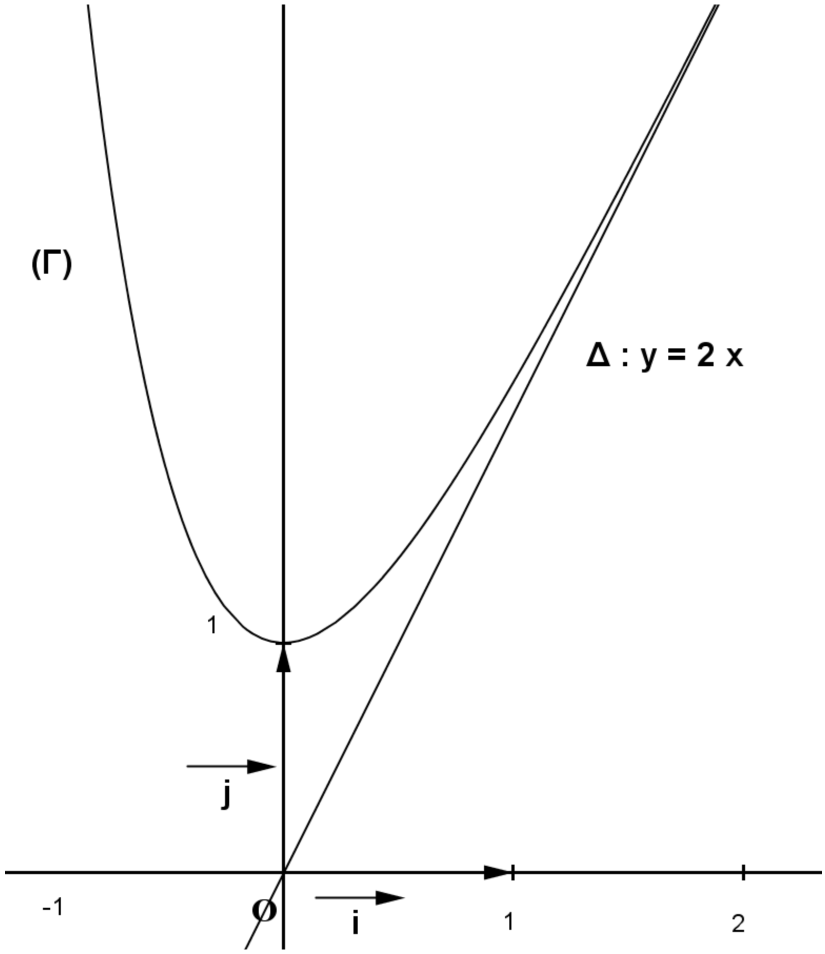
2)a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+e^{-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} 2-2\left(\frac{e^{-2x}}{-2x}\right)=-\infty.$

D'où la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(-\infty)$.

b) $\Delta: y=2x.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0.$ D'où la droite Δ est une asymptote oblique à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$.

3) La courbe (Γ) de f.



Exercice 4

$g(x) = x\,\mathrm{Log}(1+x)\ ;\ x \in \left]-1, +\infty\right[.$

1)a) α l'abscisse du point A d'intersection, autre que O, de la courbe (C) de g et la droite D d'équation $y = x$. Donc

$$\begin{aligned} g(\alpha) = \alpha &\Leftrightarrow \alpha\,\mathrm{Log}(1+\alpha) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha(1-\mathrm{Log}(1+\alpha)) = 0 \\ &\overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} 1-\mathrm{Log}(1+\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Log}(1+\alpha) = 1 \\ &\Leftrightarrow 1+\alpha = e \\ &\Leftrightarrow \alpha = e-1 \end{aligned}$$

b) La position de la courbe (C) par rapport à la droite D permet de déterminer le signe de $g(x)-x$; pour $x \in \left]-1, +\infty\right[$.

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
Position de (C) par rapport à D	(C) est au dessus de D	(C) traverse	(C) est au dessous de D	(C) traverse	(C) est au dessus de D
$g(x)-x$	$+$	0	$-$	0	$+$

2)a) $G(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)\,\mathrm{Log}(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\ \ ;\ \ x\in\left]-1\,,+\infty\right[$.

La fonction G est dérivable sur $\left]-1\,,+\infty\right[$.

$$G'(x)=\frac{1}{2}(2x)\,\mathrm{Log}(1+x)+\frac{1}{2}(x^2-1)\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$=x\,\mathrm{Log}(1+x)+\frac{1}{2}(x-1)(x+1)\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$=x\,\mathrm{Log}(1+x)+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$
$$=x\,\mathrm{Log}(1+x)=g(x).$$

D’où G est une primitive de g sur $\left]-1\,,+\infty\right[$.

b) Soit $\mathcal{A}$ L’aire du domaine limité par la courbe (C), la droite D, l’axe des ordonnées et la droite d’équation $x=e-1$. $\mathcal{A}=\int_0^{e-1}(x-g(x))dx$.

$$\int_0^{e-1}(x-g(x))dx=\int_0^{e-1}x\,dx-\int_0^{e-1}g(x)\,dx$$
$$=(e-1)-\left[G(x)\right]_0^{e-1}=(e-1)-\left[G(e-1)-G(0)\right]$$
$$=(e-1)-\frac{1}{2}\left[(e-1)^2-1\right]+\frac{1}{4}(e-1)^2-\frac{1}{2}(e-1)$$
$$=e-1-\frac{1}{2}\left[e^2-2e+1\right]+\frac{1}{4}(e^2-2e+1)-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{4}e^2+e+\frac{1}{4}$$

D'où $\mathcal{A}=\int_0^{e-1}(x-g(x))dx=-\frac{1}{4}e^2+e+\frac{1}{4}$ u.a .