

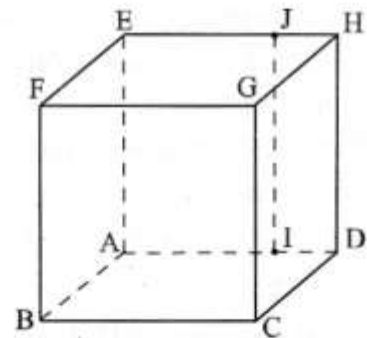
Le sujet comporte 4 pages. La page 4 / 4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overline{AI} = \overline{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AD}$

On note $\vec{i} = \overline{AB}$, $\vec{j} = \overline{AD}$ et $\vec{k} = \overline{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice α est un réel et M est un point de la droite (IJ)

de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$.

2) a) Vérifier que $\overline{AF} \wedge \overline{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \alpha \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$ et que $\overline{BC} \wedge \overline{BM} = \alpha \vec{i} + \vec{k}$.

b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) Montrer que $(\overline{AF} \wedge \overline{AM}) \cdot \overline{AG} = -\alpha$ et que $(\overline{BC} \wedge \overline{BM}) \cdot \overline{BG} = 1$.

b) Montrer que

(M, A, F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume.

Exercice 2 (4 points)

Une enquête faite dans un établissement scolaire (E) a montré que 9 élèves sur 30 consomment des drogues. Un test de dépistage est effectué pour un élève.

On désigne par A l'événement "l'élève testé est un consommateur de drogues".

- 1) Déterminer $p(A)$.
- 2) Une association de lutte contre les drogues a entamé une action dans cet établissement. Elle a organisé une session de traitement pour les consommateurs de drogues et une session de sensibilisation pour les non consommateurs.

L'association a constaté que :

Parmi les élèves consommateurs de drogues, 65% réussissent à arrêter toute consommation de drogues.

Parmi les élèves non consommateurs de drogues, 4% deviennent des consommateurs.

Un test de dépistage est effectué pour un élève après cette session.

Soit B l'événement "l'élève testé à la fin de la session est un consommateur de drogues".

- a) Déterminer $p(B/A)$ et $p(\bar{B}/A)$.
 - b) Déterminer $p(B/\bar{A})$ et $p(\bar{B}/\bar{A})$.
 - c) Calculer $p(B)$.
- 3) Estimer le nombre d'élèves consommateurs de drogues dans une classe de 30 élèves de l'établissement scolaire (E) après la fin de la session.

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$.

- 1) a) Calculer $f'(x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.

- 2) Soit g la fonction réciproque de f .

a) Justifier que g est dérivable sur $[0,1[$.

b) Montrer que pour réel x de l'intervalle $[0,1[$, $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(On rappelle que pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

- 3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan, C_f et C_g sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies

sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

C_f coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha, 0)$.

C_g coupe l'axe des abscisses au point $B(\beta, 0)$.

1) a) Donner le signe de $f(x)$ et celui de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

b) Justifier que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ et que $\ln \beta = \frac{1}{\beta}$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - \ln x$ et C_h sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.

c) Vérifier que $h(\alpha) = -g(\alpha)$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction h .

3) a) Vérifier que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f(x) - h(x) = g(x)$.

b) Étudier la position relative des courbes C_f et C_h .

c) Construire C_h dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4) Soit $a > 0$. La droite Δ d'équation $x = a$ coupe les courbes C_f et C_g respectivement en M et N .

Montrer que la distance MN est minimale pour $a = \alpha$.

Annexe à rendre avec la copie

