Mathématiques
Sciences de l'informatique
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

1) $64^{100} \equiv 1[7]$. **Vrai**

On a $64 \equiv 1[7]$ d'où $64^{100} \equiv 1[7]$.

2) Le reste de la division euclidienne de 9^{2013} par 5 est 1. **Faux**

On a $9 \equiv -1[5]$ d'où $9^{2013} \equiv (-1)^{2013}[5] \equiv -1[5] \equiv 4[5]$.

D'où le reste de la division euclidienne de 9^{2013} par 5 est 4.

3) Il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs tels que $4x+5y=1$. **Vrai**

Les entiers 4 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout il existe des couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs tels que $4x+5y=1$.

Le couple $(4\ ;-3)$ est l'un de ces couples.

4) Si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a+b=17$, alors a et b sont premiers entre eux. **Vrai**

Soit d le pgcd de a et b. On a d divise a et d divise b alors d divise $a+b$ d'où d divise 17.
Donc d est égal à 1 ou égal à 17.
Si $d=17$ alors $a \geq 17$ et $b \geq 17$ et $a+b \geq 34$, or $a+b=17$, d'où $d=1$.
Ainsi a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2

1) $P=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -6\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

a) $$P\times Q=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -6\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=3I_3$$

b) On a : $P\times Q=3I_3 \Leftrightarrow P\times\frac{1}{3}Q=I_3$

D'où la matrice P est inversible et son inverse est la matrice $\frac{1}{3}Q$.

$$P^{-1}=\frac{1}{3}Q=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1\end{pmatrix}.$$

2) On pose x, y et z les nombres de cartes graphiques respectivement de types A, B et C fabriquées au cours de cette journée.

Le nombre de circuits de type C_1 utilisés, au cours de cette journée, est de 235 soit, 5x pour le modèle A, 7y pour le modèle B et 9z pour le modèle C. Donc $5x+7y+9z=235$.

De même, le nombre de circuits de type C_2 utilisés, au cours de cette journée, est de 65 et on a : $x+2y+3z=65$.

De même, le nombre de circuits de type C_3 utilisés, au cours de cette journée, est de 80 et on a : $2x+2y+3z=80$.

La situation se résume par le système suivant : $\begin{cases} 5x+7y+9z=235 \\ x+2y+3z=65 \\ 2x+2y+3z=80 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x+7y+9z=235 \\ x+2y+3z=65 \\ 2x+2y+3z=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ainsi le nombre de cartes graphiques, fabriquées au cours de cette journée, 15 du modèle A, 10 du modèle B et 10 du modèle C.

Exercice 3

$f(x)=\ x-e\ln(x)\ ;\ \left]0;+\infty\right[$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\vec{j})$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ x-e\ln(x)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - e\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - e\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty.$$

b) $f'(x) = 1 - e\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{x}$; $x > 0.$

c) Le tableau de variation de f est :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) On a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - e\dfrac{\ln(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -e\ln(x) = -\infty.$

Donc la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y = x$.

b) Pour étudier la position de (C) par rapport à Δ, on étudie le signe de $f(x) - x$.

$f(x) - x = -e\ln(x)$; $x > 0.$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	
Position de (C) par rapport à Δ	‖	(C) est au dessus de Δ	(C) traverse Δ	(C) est au dessous de Δ	

c) Voir figure.

3)a) $F : x \mapsto x\ln(x) - x$; $x \in]0;+\infty[$.

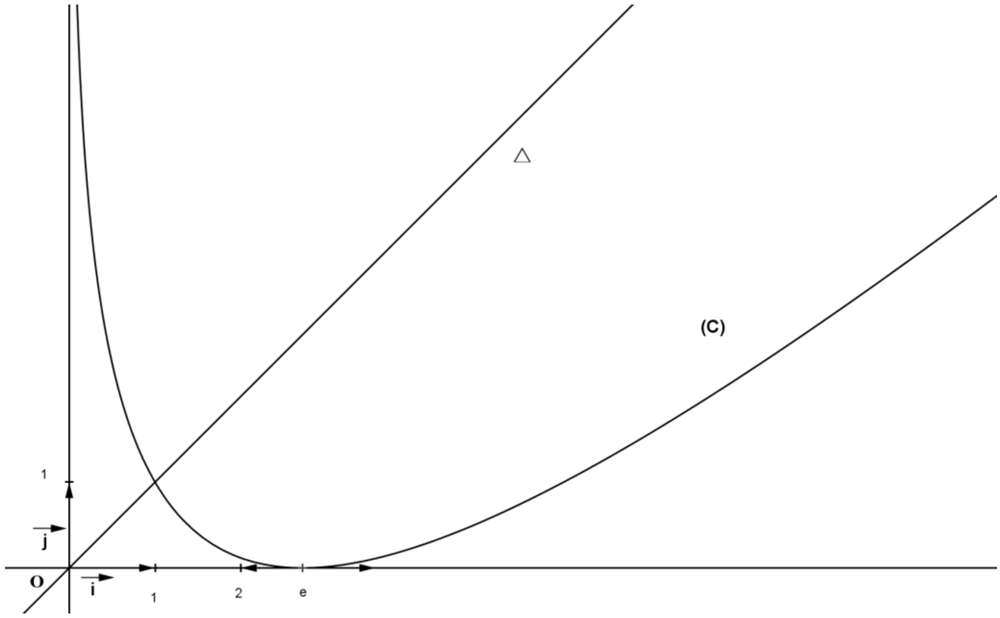
$F(x) = x\ln(x) - x$

$F'(x) = \ln(x) + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$

D'où F est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

b) On note A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e.$

$$A = \int_1^e (x - f(x))\,dx = \int_1^e e\ln(x)\,dx = \left[e\,F(x)\right]_1^e = e(F(e) - F(1)) = e \text{ unité d'aire.}$$



Exercice 4

1) U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} \\ U_n = U_{n-1} + \dfrac{1}{n(n+1)} \ ; \ \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{cases}$

a) $U_2 = U_1 + \dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

$U_3 = U_2 + \dfrac{1}{3\times 4} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

- $U_1 = \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{1+1}$, d’où l’égalité est vérifiée pour $n = 1$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

  On suppose que l’égalité est vraie pour k, on a donc $U_k = 1 - \dfrac{1}{k+1}$.
- Montrons que l’égalité est vraie pour $k+1$.

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

D’où l’égalité est vraie pour $k+1$.

Ainsi d’après le principe de raisonnement par récurrence on a :

$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$

2) V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}} V_n$.

a) $V_2 = e^{\frac{-1}{2}} V_1 = e^{\frac{-1}{2}}$.

$V_3 = e^{\frac{-1}{2\times3}} V_2 = e^{\frac{-1}{6}} e^{\frac{-1}{2}} = e^{\frac{-1}{6}+\frac{-1}{2}} = e^{\frac{-2}{3}}$.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n > 0$.

Raisonnons par récurrence :

- $V_1 = 1 > 0$, d'où la proposition est vérifiée pour $n = 1$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition est vraie pour k, on a donc $V_k > 0$.
- Montrons que la proposition est vraie pour $k+1$.

$V_k > 0$ et $e^{\frac{-1}{k(k+1)}} > 0$ d'où $V_{k+1} = e^{\frac{-1}{k(k+1)}} V_k > 0.$

D'où la proposition est vraie pour $k+1$.

Ainsi $V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$V_{n+1} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}} V_n \overset{V_n \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{V_{n+1}}{V_n} = e^{\frac{-1}{n(n+1)}} < 1$$

On a $V_n > 0$ et $\frac{V_{n+1}}{V_n} < 1$ d'où $V_{n+1} < V_n$

Ainsi la suite V est décroissante.

La suite V est décroissante et minorée par 0 ($V_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), donc elle converge.

3) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $V_n = e^{-U_{n-1}}$.

Raisonnons par récurrence :

- $V_2 = e^{-\frac{1}{2}} = e^{-U_1}$, d'où la proposition est vérifiée pour $n = 2$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  On suppose que la proposition est vraie pour k, on a donc $V_k = e^{-U_{k-1}}$.
- Montrons que la proposition est vraie pour $k+1$.

$$V_{k+1} = e^{\frac{-1}{k(k+1)}} V_k = e^{\frac{-1}{k(k+1)}} e^{-U_{k-1}} = e^{\frac{-1}{k(k+1)} - U_{k-1}} = e^{-\left(U_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)}\right)} = e^{-U_k}.$$

D'où la proposition est vraie pour $k+1$.

Ainsi Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $V_n = e^{-U_{n-1}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-U_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-1+\frac{1}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$