Mathématiques
Economie et gestion
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

1) b	2) c	3) a	4) b

1) $f(x) = -1 + \ln x$; $x \in]0, +\infty[$. F la primitive de f qui s'annule en e.

On remarque que les trois fonctions proposées s'annulent en e. Pour distinguer laquelle est la primitive cherchée, on va les dériver.

a) $F(x) = x\ln x - x$; $F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

b) $F(x) = x\ln x - 2x + e$; $F'(x) = \ln x + 1 - 2 = -1 + \ln x = f(x)$

c) $F(x) = x\ln x - e$; $F'(x) = \ln x + 1$

D'où la réponse est en b).

2) f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle $f'(x) = 1 + e^x$. g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x)$.

$g'(x) = (2x)'.f'(2x) = 2(1 + e^{2x}) = 2 + 2e^{2x}$. La réponse est donc en c).

3) (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^n t\,e^{-2t}\,dt$.

$$u_{n+1} = \int_0^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt = \int_0^{n} t\,e^{-2t}\,dt + \int_n^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt = u_n + \int_n^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt.$$

On a donc $u_{n+1} = u_n + \int_n^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt$.

On a $t\,e^{-2t} \geq 0$; pour tout $t \in [n, n+1]$. Donc $\int_n^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt \geq 0$.

$$\int_n^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt \geq 0 \Rightarrow u_n + \int_n^{n+1} t\,e^{-2t}\,dt \geq u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n.$$

D'où la suite (u_n) est croissante. La réponse est donc en a).

4) On procède par élimination :

D'après la matrice donnée on a :

- un seul arc d'origine C, c'est l'arc $(C \to D)$. Donc le schéma en c) n'est pas convenable puisqu'il y a deux arcs d'origine C : $(C \to D)$ et $(C \to E)$.
- 3 arcs d'origine A : $(A \to B), (A \to C)$ et $(A \to E)$. Donc le schéma en a) n'est pas convenable puisqu'il n'y a pas l'arc $(A \to B)$. d'origine A et d'extrémité B.

La réponse est donc en b).

Exercice 2

1)a) $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$. Pour calculer le déterminant de A, utilisons la 3$^{\text{ème}}$ colonne.

$$\text{dét}(A)=\begin{vmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}2&0\\-2&1\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}3&-1\\-2&1\end{vmatrix}=1\times 2-1\times(3-2)=1.$$

Remarque :

Pour calculer le déterminant de A, on peut utiliser n'importe quelle ligne ou colonne en respectant la règle des signes. Il vaut mieux utiliser une ligne ou une colonne où il y a des 0, pour simplifier le calcul.

b) $\text{dét}(A)=1\neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

2)a)$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$; $A-2I_3=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}$.

$$A(A-2I_3)=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3.$$

b) $A(A-2I_3)=-I_3 \Leftrightarrow A(-A+2I_3)=I_3$. D'où $A^{-1}=-A+2I_3=2I_3-A$.

$$A-2I_3=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\-2&1&-2\end{pmatrix}, \text{ d'où } -A+2I_3=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}=A^{-1}.$$

3)a) On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) : $\begin{cases}-x+y-z=1\\-2x+2y-z=-1\\2x-y+2z=1\end{cases}$

On introduit l'écriture matricielle :

$$(S)\begin{cases}-x+y-z=1\\-2x+2y-z=-1\\2x-y+2z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix}$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \{(5, 3, -3)\}$.

b) $(S')\begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ \ln(\dfrac{v^2}{u^2 w}) = -1 \\ \ln(\dfrac{u^2 w^2}{v}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ \ln v^2 - \ln(u^2 w) = -1 \\ \ln(u^2 w^2) - \ln v = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ 2\ln v - (\ln(u^2) + \ln w) = -1 \\ \ln(u^2) + \ln(w^2) - \ln v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ -2\ln u + 2\ln v + \ln w = -1 \\ 2\ln u - \ln v + 2\ln w = 1 \end{cases}$$

On pose $x = \ln u$; $y = \ln v$ et $z = \ln w$. On obtient :

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ln u \\ \ln v \\ \ln w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^5 \\ e^3 \\ e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $u = e^5$; $v = e^3$ et $w = e^{-3}$.

Exercice 3

1) En utilisant la calculatrice, on trouve $\overline{x} = 3{,}5$; $\overline{y} = 11{,}22$ et $\sigma_x = 1{,}71$.

2)a) La droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrées a pour équation :

$z = \alpha(x - \overline{x}) + \overline{z} = \alpha x - \alpha\overline{x} + \overline{z} = \alpha x + \beta$;

où $\alpha = \dfrac{\operatorname{cov}(x,z)}{v(x)} = \dfrac{\operatorname{cov}(x,z)}{\sigma_x^2}$ et $\beta = -\alpha\overline{x} + \overline{z} = -\dfrac{\operatorname{cov}(x,z)}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{z}$

b) $z_i = \ln(y_i)$.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	1,97	2,07	2,26	2,47	2,67	2,80

c) $\overline{z} = 2{,}37$; $\operatorname{cov}(x,z) = 0{,}51$; $\alpha = \dfrac{\operatorname{cov}(x,z)}{\sigma_x^2} = 0{,}17$ et $\beta = 1{,}77$.

3)a) $\sigma_z = 0{,}30$; $r(x,z) = \dfrac{\operatorname{cov}(x,z)}{\sigma_x \sigma_z} = \dfrac{0{,}51}{1{,}71 \times 0{,}30} = 0{,}99$.

$r(x,z) > 0{,}95$, donc il y a une très forte corrélation entre x et z et cela justifie le choix de l'ajustement linéaire de z en x.

b) On a $z=\ln(y)$.

$z=\alpha x+\beta \Leftrightarrow \ln(y)=\alpha x+\beta$

$\Leftrightarrow y=e^{\alpha x+\beta}$

$\Leftrightarrow y=e^{\beta}e^{\alpha x}$

$y=e^{\beta}e^{\alpha x}=a\,e^{bx}$; avec $a=e^{\beta}\simeq 5,87$ et $b=\alpha=0,17$.

$y=5,87\,e^{0,17x}$

c) Appliquons l'ajustement précédent pour estimer le pourcentage des familles tunisiennes qui auront au moins un ordinateur en 2015.

Le rang de l'année 2015 est $x_{2015}=11$.

Pour $x=11$ on a $y=5,87e^{0,17\times 11}\simeq 38,09$.

Donc on estime que 38,09% des familles tunisiennes auront au moins un ordinateur en 2015.

Exercice 4

1) Par une lecture graphique :

a) $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{c}=+\infty$.

Remarques :

a) $f'(0)=0$, car la courbe de f admet une tangente horizontale au point O.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{4}$ car la courbe (C) de f admet la droite d'équation $y=\dfrac{1}{4}$ comme asymptote horizontale au voisinage de (-∞).

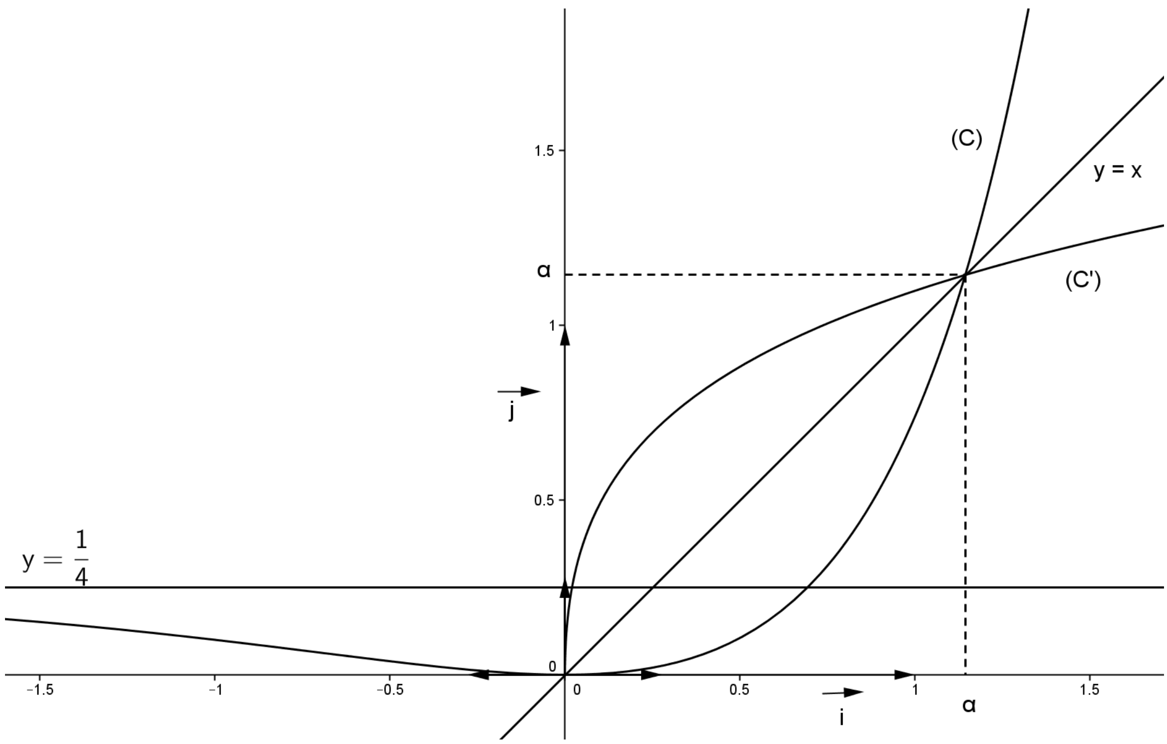
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{c}=+\infty$ car la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de (+∞).

2) g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)$.

a) D'après le graphique la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, d'où g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. g est continue sur $[0,+\infty[$ puisque f est continue sur ce même intervalle.

g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, d'où g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=f([0,+\infty[)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=[0,+\infty[$.

b) g^{-1} la fonction réciproque de g. On sait que la courbe (C') de g^{-1} est le symétrique de la courbe de g par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y=x$.



3) On suppose que $f(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{2}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x - f(x) = x - \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)^2$$

$$= x - \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right)^2 = x - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right) = \frac{1}{4}\left(4x - 1 + 2e^x - e^{2x}\right).$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - f(x) = \dfrac{1}{4}\left(4x - 1 + 2e^x - e^{2x}\right)$.

b) A l'aire de la région du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Par symétrie, on peut remarquer que l'aire A de cette région du plan est le double de l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation , la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$. On a donc :

$$A = 2\int_0^{\alpha} (x - f(x))dx = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \left(4x - 1 + 2e^{x} - e^{2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x^2 - x + 2e^{x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(2\alpha^2 - \alpha + 2e^{\alpha} - \frac{1}{2}e^{2\alpha}\right) - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4} + e^{\alpha} - \frac{1}{4}e^{2\alpha} \text{ unité d'aire.}$$