Section: Sciences de l'informatique *Session principale 2012*

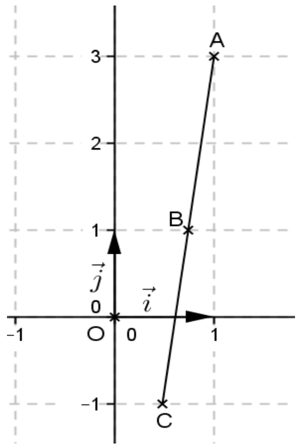
Matière : Mathématiques

<u>Exercice 1</u> (4,5 points)

- **Contenu :** Nombres complexes – géométrie.
- **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- **Corrigé :**

1) B est le milieu du segment [AC] $\Leftrightarrow z_B = \frac{z_A+z_C}{2}$

$\Leftrightarrow -2z^2 + iz + 1 + 3i = 0$



2) a) $(4+3i)^2 = 7+24i$

b) $\Delta = 7+24i$ alors $\delta = 4+3i$ est une racine carrée de Δ

$z' = \frac{-i-4-3i}{-4} = 1+i$, $z'' = \frac{-i+4+3i}{-4} = -1-\frac{1}{2}i$

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i, -1-\frac{1}{2}i\}$

3) a) $iz = i(-1-\frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} - i$

b) Comme z est une solution de l'équation (E) alors B est le milieu du segment [AC]. (voir figure)

<u>Exercice 2</u> (5 points)

- **Contenu :** Suites réelles.
- **Aptitudes visées :**.Etudier une suite récurrente, reconnaitre un minorant d'une suite, étudier la convergence d'une suite à l'aide d'une suite géométrique.
- **Corrigé :**

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + U_{n-1}^2 + 2U_{n-1} = (1+U_{n-1})^2$

b) Par récurrence :

On a $U_0 = -\frac{1}{2} \succ -1$

Soit n un entier naturel, on suppose que $U_n > -1$

On a $U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n$.

$1 + U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n + 1$

$= (U_n + 1)^2$

On a $U_n \succ -1$ donc $(U_n + 1)^2 \succ 0$

et par suite $U_{n+1} \succ -1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ ona $U_n \succ -1$

2) a) Pour tout un entier naturel n, $V_{n+1} = \ln(1+U_{n+1}) = \ln(1+U_n)^2 = 2\ln(1+U_n) = 2V_n$

Conclusion : V est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme

$V_0 = \ln(1+U_0) = \ln(1-\frac{1}{2}) = -\ln 2$

b) Pour tout un entier naturel n, $V_n = V_0 q^n = -2^n \ln 2$

On a $V_n = \ln(1+U_n)$ alors $U_n = e^{V_n} - 1 = e^{-2^n \ln 2} - 1$

c) $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} e^{V_n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1$

<u>Exercice 3</u> (4,5 points)

✓ **Contenu :** Matrices, équation de tangente à une courbe, point d'inflexion et dérivée seconde, système linéaire 3×3.

✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par un système linéaire, reconnaitre l'inverse d'une matrice d'ordre3, résoudre un système linéaire 3×3, interpréter le nombre dérivé d'une fonction en un point, appliquer le théorème relatif au point d'inflexion et la dérivée seconde.

✓ **Corrigé :**

1)

a) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_3$

b) $A \times B = 5I_3$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$

2)

a) La droite d'équation y = 4x – 4 est tangente à (C) au point d'abscisse 1 signifie $f'(1) = 4$ et $f(1) = 0$.

« (C) admet un point d'inflexion d'abscisse – 1 » donne $f''(-1) = 0$

$f(x) = a x^3 + ax^2 + c \Rightarrow f(1) = a + b + c$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(1) = 3a + 2b + c$

$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(-1) = -6a + 2b$

Conclusion : a , b et c vérifient le système (S) : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ -3a + b = 0 \end{cases}$ signifie $A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ signifie $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{-16}{5} \end{pmatrix}$

Conclusion : Pour tout réel x, $f(x) = \frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - \frac{16}{5}x$

Exercice 4 (6 points)

✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.

✓ **Aptitudes visées :** Lire un graphique pour : déterminer les limites d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, reconnaitre une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.

✓ **Corrigé :**

1) Traçage de T : voir graphique

2) a) $f(0) = -1$ et $f'(0) = -2$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) Voir figure

b) Aire$_{(OAB)}$ = $\dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{1}{4}$

Aire$_{(OAC)}$ = $\dfrac{OA \times OC}{2} = \dfrac{3}{8}$

c) On a : Aire$_{(OAB)}$ $\prec$ A $\prec$ Aire$_{(OAC)}$ alors $\dfrac{1}{4} \prec A \prec \dfrac{3}{8}$ d'où $2 \prec 8A \prec 3$