Section: Sciences de l'informatique *Session de contrôle 2012*

Matière : Mathématiques

<u>Exercice 1</u> (4,5 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes- géométrie.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaitre la nature d'un quadrilatère.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^4 - 2z^3 + 2z^2) + (z^2 - 2z + 2)$

$$= z^2(z^2 - 2z + 2) + (z^2 - 2z + 2)$$

$$= (1 + z^2)(z^2 - 2z + 2)$$

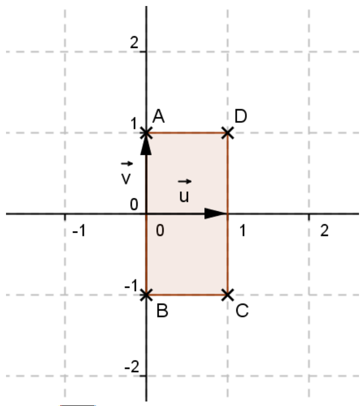
b) $(1 + z^2)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow 1 + z^2 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2z + 2 = 0$

* $1 + z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -i \text{ ou } z = i$

* $z^2 - 2z + 2 = 0, \quad \Delta' = -1 \;,\; \delta' = i \quad z' = 1 - i \text{ et } z'' = 1 + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-i,\ i, 1 - i, 1 + i\}$

2) a)



b) $\text{aff}(\overrightarrow{AD}) = \text{aff}(\overrightarrow{BC}) = 1$ alors ABCD est un parallélogramme, de plus $(AB) \perp (AD)$ donc il s'agit d'un rectangle.

<u>Exercice 2</u> (5 points)

- ✓ **Contenu :** Probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales.
  Variable aléatoire, loi de probabilité..
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est réalisé,
  Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- ✓ **Corrigé :**

1) p(A) = $\frac{C_2^2 \times C_3^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$, p(B) = $\frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

p(C) = $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$, $p(B \cap A) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{28} = \frac{9}{28}$ donc p(C) = $\frac{9}{10}$.

2) a)

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{3}{28}$

b) p(X > 0) = $\frac{9}{28}$.

Exercice 3 **(4,5 points)**

- **Contenu :** Arithmétique
- **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par une équation du type ax + by = c, connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type ax + by = c.
- **Corrigé :**

1) a) Si

(x, y) est solution de (E) alors $2x - 7y = 3 \Rightarrow y = 2(x - 3y - 1) - 1$

$\Rightarrow y \equiv 1[2] \Rightarrow$ y est impair

Autrement: Si (x, y) est solution de (E) alors $2x - 7y = 3$ et donc $7y = 2x - 3$ et comme $2x - 3$ est impair donc $7y$ est impair et par suite y l'est aussi

b) (x, y) est solution de $(E) \Rightarrow$ y est impair $\Rightarrow y = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

Pour $y = 2k + 1$ on a : $2x = 7y + 3 = 14k + 10 \Rightarrow x = 7k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : Toute solution de (E) est de la forme $(7k + 5, 2k + 1)$ ou $k \in \mathbb{Z}$

c) D'après b) Toute solution de (E) est de la forme $(7k + 5, 2k + 1)$ ou $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le couple $(7k + 5, 2k + 1)$ vérifie l'équation (E).

En effet : $2(7k + 5) - 7(2k + 1) = 14k + 10 - 14k - 7 = 3$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(7k + 5, 2k + 1) \; ; k \in \mathbb{Z}\}$

2) Soit p un chiffre tel que le nombre p795 est une référence d'un article

a) $p79 = 100p + 79$; $100 \equiv 2[7] \Rightarrow 100p \equiv 2p\ [7]$; $79 \equiv 2[7]$ Donc $p79 \equiv 2p + 2\ [7]$

b) On a : p795 est une référence d'un article $\Rightarrow$ $p79 = 7k_1 + 5$, $k_1 \in \mathbb{N}$

d' autre part : $p79 = 7k_2 + 2p + 2$ ou $k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7k_1 + 5 = 7k_2 + 2p + 2$

ainsi $2p - 7(k_1 - k_2) = 3 \Rightarrow 2p - 7y = 3$ ou $y = (k_1 - k_2) \in \mathbb{Z}$

Autrement: p795 est une référence d'un article $\Rightarrow$ $p79 \equiv 5[7]$

d'autre part : $p79 \equiv 2p + 2\ [7]$ donc $2p + 2 \equiv 5\ [7]$ signifie $2p \equiv 3\ [7]$ et par suite il existe un entier relatif y tel que 2p-7y =3

c) D'aprés b) (p, y) est une solution de (E) donc $p = 7k + 5, k \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq p \leq 9$ et $\Rightarrow p = 5$

Exercice 4 **(6 points)**

- **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle : variations, branches infinies, point d'inflexion, fonction réciproque, courbe.
- **Aptitudes visées :** Etudier les variations et le signe d'une fonction, montrer qu'une fonction est une bijection, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, étudier les branches infinies, étudier la position relative de la courbe avec son asymptote, déterminer un point d'inflexion , tracer l'allure de la courbe d'une fonction.
- **Corrigé :**

1) a) $g'(x) = xe^x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g '(x)		–	0	+	
g(x)		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) g(0)=0 qui est un minimum absolu pour g alors pour tout réel x, $g(x) \geq 0$.

2) a) f'(x) = g(x) ≥ 0 alors f est strictement croissante sur IR.

b) f est continue et strictement croissante sur IR et f(IR) = IR donc f est une bijection de IR sur IR.

c) f(IR) = IR alors il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$. f(-2,7)×f(-2,6)< 0 alors $-2{,}7 < \alpha < -2{,}6$.

3) a) $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+3)] = 0$ alors D: y = x+3 est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

b) $f(x) - (x+3) = (x-2)e^x$.

Si $x \le 2$, alors (C) est au dessous de D.

Si $x \ge 2$, alors (C) est au dessus de D.

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}[(\frac{x-2}{x})e^x + 1 + \frac{3}{x}] = +\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

4) a) f est deux fois dérivable et $f''(x) = g'(x) = xe^x$.

f" s'annule et change de signe en 0 alors I(0,1) est un point d'inflexion pour (C).

b)