MATHS

Section : Maths

1ère Session

EXERCICE 1

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x$ (mod 2).

b) Si $x \equiv 2$ (mod 14) alors $x \equiv 1$ (mod 7).

c) Si $4x \equiv 10y$ (mod 5) alors $x \equiv 0$ (mod 5).

Si $\begin{cases} x \equiv 4 (\text{mod } 5) \\ y \equiv 5 (\text{mod } 8) \end{cases}$ alors 8x -5y = 7

Contenu

- *Congruence .*
- *Reste modulo n.*

Solutions et commentaires

a) **Vrai.** En effet : on sait que si x est un entier, alors son reste modulo 2 est soit 0 soit 1:

Reste de x (mod2)	0	1
Reste de x^3 (mod2)	0	1

Il en résulte du tableau ci-dessus que $x^3 \equiv x(\text{mod } 2)$.

✓ *On pourrait envisager la justification suivante :* $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ *est toujours pair, par conséquent* $x^3 \equiv x(\text{mod } 2)$

b) **Faux**. Car pour $x = 2$, $2 \equiv 2(\text{mod} 14)$ et 2 non congru à 1 modulo 7.

c) **Vrai**. En effet : si $4x \equiv 10y(\text{mod } 5)$ alors $4x \equiv 0(\text{mod } 5)$ et donc $x \equiv 0$ (mod5) ; car $4 \wedge 5 = 1$.

✓ *Il s'agit d'utiliser le lemme de Gauss*: $\begin{cases} ax \equiv 0 \ (\text{mod } b) \\ \text{b ne divise pas a} \end{cases}$ alors $x \equiv 0$ (mod b)

d) **Faux**. Car : pour $x = 9$ et $y = 5$, $8 \times 9 - 7 \times 5 = 47$.

EXERCICE 2

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .
2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

   b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers + ∞.

   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathcal{C}$).

   b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ($\mathcal{C}$) au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Construire I.

   b) Construire la tangente T.

   c) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$).

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite d'équation y = 1 et les droites d'équations x = k et x = k + 1 où k est un entier naturel non nul.

   a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

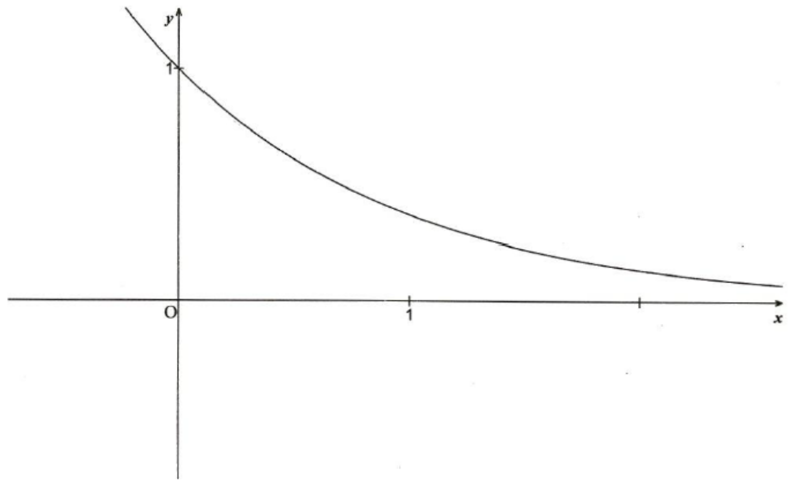
5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

   a) Interpréter graphiquement S_n .

   b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

   c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 figure1



Contenu

- *Continuité- Dérivabilité –calculs de limites.*
- *Calcul d'intégrales*
- *Suites d'intégrales, limite d'une suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Etudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.*
- *Encadrer une expression algébrique.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un point d'inflexion.*
- *Exploiter un graphique pour construire un point ou une droite dans le plan .*
- *Tracer la courbe représentative d'une fonction.*
- *Reconnaître et encadrer une aire.*

Solutions et commentaires

I.

1) $g(0)=1$. Pour tout réel x, $g'(x)=-e^{-x}$ ce qui donne $g'(0)=-1$.

Une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 est $y=g'(0)x+g(0)=-x+1$.

2) a) Pour tout $x\geq 0$, $-x\leq 0$ donc $e^{-x}\leq 1$.

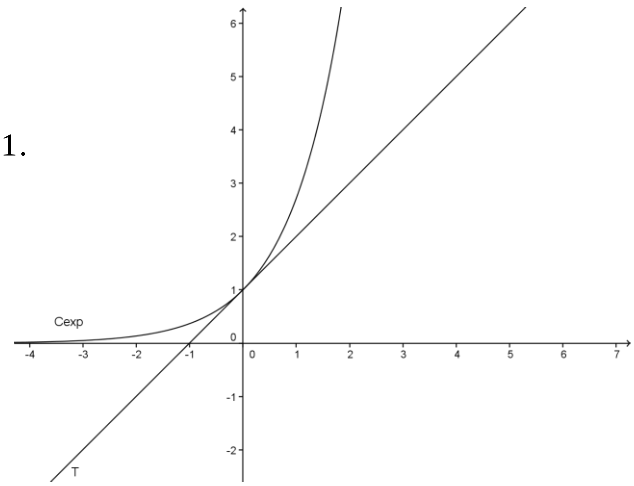
Pour tout $x\geq 0$, posons la fonction h définie par $h(x)=e^{-x}+x-1$.

La fonction h est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h'(x)=1-e^{-x}\geq 0$ donc h est strictement croissante sur

$[0,+\infty[$. Il en résulte que si $x\geq 0$ alors $h(x)\geq h(0)=0$. On en déduit que $e^{-x}\geq 1-x$ pour tout $x\geq 0$.

Ainsi pour tout $x\geq 0$, $1-x\leq e^{-x}\leq 1$.

✓ *La courbe représentative de la fonction* *exponentielle est au dessus de la la tangente T_1 au point d'abscisse 0 ($T_1 : y = x+1$) (voir graphique ci-contre).*



Ainsi pour tout réel x ; $e^{x} \geq x+1$ *et par conséquent* $e^{-x} \geq -x+1$.

b) D'après a) $1-t \leq e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0,x],\ x \geq 0.$

Les fonctions $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues sur $[0,x],\ x \geq 0$

donc $\int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x 1dt$

Donc $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x \leq x$ d'où $x-\frac{x^2}{2} \leq 1-e^{-x} \leq x$ pour tout $x \geq 0.$

II.

1) a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} e^{x} = 1 \end{cases}$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\left(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0 = f_d'(0)$.donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$.

c) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad\qquad$ $+$
f	0 $\nearrow$ 1

2) a) La fonction f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f''(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe. Donc le point $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}$).

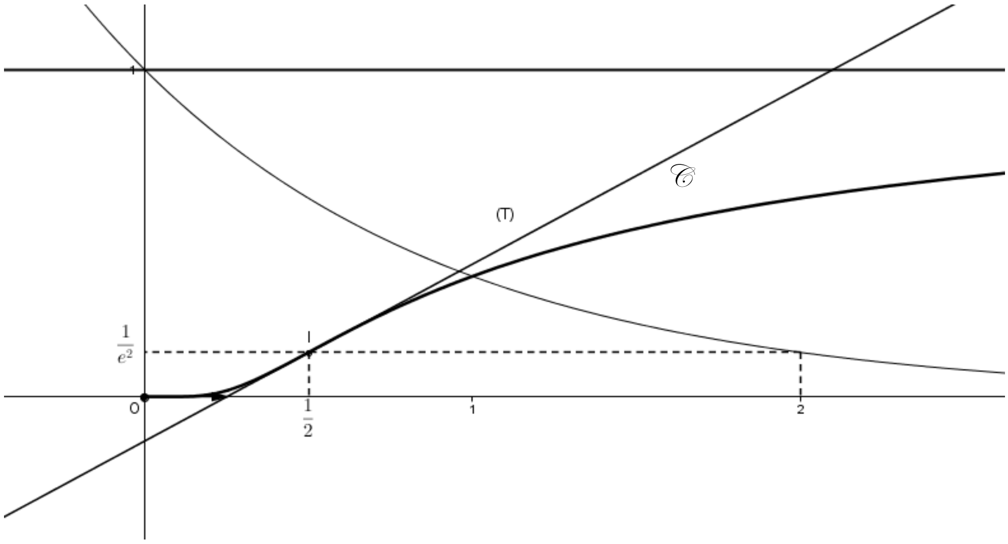
b) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{e^2}$; $T : y = \frac{4}{e^2}x - \frac{3}{e^2}$.

3) a) Le point I est le point de (Γ) d'abscisse $\frac{1}{2}$

✓ *Il s'agit d'exploiter une donnée graphique pour construire un point du plan.*

b) La tangente T passe par le point I et de coefficient directeur $\frac{4}{e^2}$; ce coefficient est constructible vu que $\frac{1}{e^2}$.

c) Représentation graphique de f.



4)a) $A_k = \int_k^{k+1}(1-f(x))dx = \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx.$ or d'après I 2) on a $x-\frac{x^2}{2} \le 1-e^{-x} \le x$ pour tout $x \ge 0$,

on en déduit que $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2} \le 1-e^{-\frac{1}{x}} \le \frac{1}{x}$ pour tout $x>0$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}, x \mapsto 1-e^{-\frac{1}{x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $[k,k+1]$, $k \ge 1$

donc $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}dx \le \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx \le \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ d'où $\left[\ln x+\frac{1}{2x}\right]_k^{k+1} \le A_k \le [\ln x]_k^{k+1}$

on en déduit que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] \le A_k \le \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) $\lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] = \lim_{k\to+\infty}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=0$ donc $\lim_{k\to+\infty} A_k = 0$.

5)a) pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx = \int_1^{n+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx.$ Ainsi S_n est l'aire de la partie du plan limitée par (𝒞), la droite y = 1 et les droites d'équations x = 1 et x = n+1.

b) On a $S_n = \int_1^{n+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx$ donc $\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx \le S_n \le \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$.

On en déduit que $\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] \le S_n \le \ln(n+1)$.

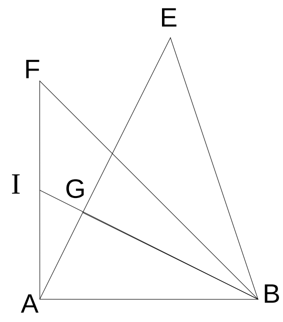
c) On sait $\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] \le S_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=+\infty$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

De plus pour tout $n>1$, $\ln(n)>0$ donc

$$\frac{\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$ et puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]}{\ln(n)} = 1$$ on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1.$$



EXERCICE 3

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

I est le milieu de [AF] . Les droites (IB) et (AE) se coupent en G

et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.
2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.
   a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.
   b) Déterminer la nature de g o g et préciser son rapport et son angle.
   c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right)=\frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.
   d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r = g o f.
   a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

Contenu

- *Similitude directe.*
- *Composée de deux similitudes directes.*
- *Rotation .*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître l'image d'un point par une similitude directe.*
- *Identifier une similitude directe connaissant deux points et leurs images.*
- *Reconnaître la composée de deux similitudes directes non inverses et de rapports inverses.*
- *Exploiter une isométrie pour identifier une configuration usuelle du plan (carré).*

Solutions et commentaires

1) Le triangle BEG est rectangle, isocèle en G et de sens direct donc $\begin{cases} \dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BG}{\sqrt{2}BG} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Il en résulte que $f(E) = G$.

Le triangle BFA est rectangle, isocèle en A et de sens direct donc $\begin{cases} \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Il en résulte que $f(F) = A$.

✓ *Il s'agit d'utiliser une configuration de bases usuelle (triangle rectangle et isocèle) pour identifier l'image d'un point par une similitude directe.*

2) a) $\dfrac{FB}{AF} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{FB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{FA}; \overrightarrow{FB}\right)\ [2\pi]$. Soit $\left(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{FB}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

b) $g \circ g$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

c) $\tan\left(ABI\right) = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}AF}{AB} = \dfrac{1}{2}$ or $\tan\left(ABI\right) = \tan\left(ABG\right) = \dfrac{GA}{GB}$ donc $GB = 2GA$.

d) $g \circ g(A) = B$ et $\left(\overrightarrow{GA}; \overrightarrow{GB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $GB = 2GA$ donc G est le centre de $g \circ g$ donc G est le centre de g.

✓ *Il s'agit d'exploiter un résultat de cours : g et g o g sont deux similitudes directes de même centre.*

3) a) r est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angles respectifs $-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$, il en résulte que r est une rotation et d'angle $-\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ comme $(g \circ f)(F) = g(A) = F$ donc *r* est la rotation de centre F et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b) $r(E)=g(f(E))=g(G)=G$ donc $FE = FG$ et $GFE = \frac{\pi}{2}$ par suite le triangle EFG est rectangle et isocèle en F donc $GEF = \frac{\pi}{4}$. D'autre part H est le milieu de [BE] et le triangle EGB est rectangle et isocèle en G donc le triangle EGH est rectangle et isocèle en H donc $GEH = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que $HEF = \frac{\pi}{2}$.

D'où $GHE = EFG = HEF = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que le quadrilatère EFGH est un rectangle et puisque FE = FG donc EFGH est un carré.

✓ *Il s'agit d'utiliser un déplacement pour identifier une configuration usuelle (un carré).*

EXERCICE 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe ($O,\vec{u}$).

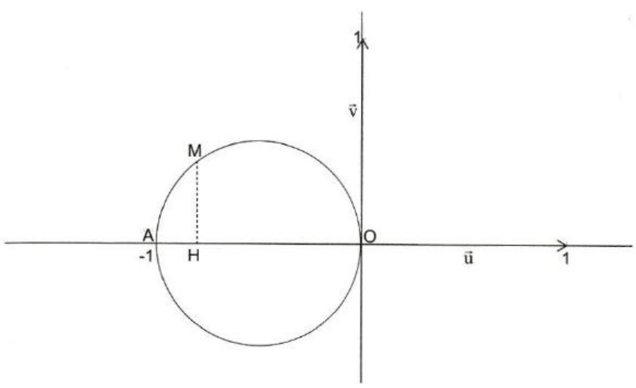
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

EXERCICE 4 : figure 2



Contenu

- *Ecriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Argument d'un nombre complexe non nul.*
- *Affixe et image .*

Aptitudes visées :

- *Déterminer l'écriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Repérer un point dans le plan et déterminer son affixe.*
- *Utiliser les nombres complexes pour déterminer un ensemble des points du plan.*
- *Utiliser les nombres complexes pour des constructions géométriques.*

Solutions et commentaires

1) a) Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $\frac{z-z^3}{z^2-z^3}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

b) $\frac{1+z}{z}=\frac{1+x+iy}{x+iy}=\frac{(1+x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) Soit M un point du plan d'affixe z non nulle et différente de 1 et -1.

(Le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si

$\begin{cases} x^2+y^2+x=0 \\ M\neq O \\ M\neq A \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \\ M\neq O \\ M\neq A \end{cases}$ si et seulement si M appartient au cercle Γ de centre $I\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A. Or le point I est le milieu de [OA] donc le cercle Γ est le cercle de diamètre [OA]. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle Γ de diamètre [OA] privé de O et A.

2) a) $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\arg\left(\frac{z^2}{z}\right)\ [2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.

$\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OP}\right)\equiv\arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)\ [2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.

b) $OH=-x$ or $x^2+y^2+x=0$ donc $-x=x^2+y^2$ il en résulte que $OH=OM^2$.

c) $ON=|z|^2=OM^2=OH$ donc N est le point d'intersection de la demi-droite $[OC)$ telle que $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$ avec le cercle de centre O et de rayon OH.

P est le point d'intersection du cercle de diamètre $[MN]$ avec la demi-droite image de $[OM)$ par la symétrie orthogonale d'axe (ON).