

**EXAMEN DU BACCALAUREAT  
SESSION DE JUIN 2011**

**SESSION  
PRINCIPALE**

**SECTION : MATHEMATIQUES**

**EPREUVE : MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 heures**

**COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

**Exercice 1 ( 3 points)**

Dans ce qui suit,  $x$  et  $y$  désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- $x^3 \equiv x \pmod{2}$ .
- Si  $x \equiv 2 \pmod{14}$  alors  $x \equiv 1 \pmod{7}$ .
- Si  $4x \equiv 10y \pmod{5}$  alors  $x \equiv 0 \pmod{5}$ .
- Si  $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$  alors  $8x - 5y = 7$ .

**Exercice 2 (6 points)**

**I -** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-x}$  et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer une équation de la tangente à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 0.
- Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$ .
  - En déduire que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$ .

**II -** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Calculer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  - Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite en 0.
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Montrer que le point  $I \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} \right)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(\mathcal{C})$ .
  - Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point  $I$ .
- Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe  $(\Gamma)$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - Construire  $I$ .
  - Construire la tangente  $T$ .
  - Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .

4) Soit  $A_k$  l'aire du domaine plan limité par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), la droite d'équation  $y = 1$  et les droites d'équations  $x = k$  et  $x = k + 1$  où  $k$  est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que  $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ .

b) Calculer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$ .

5) Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$ .

a) Interpréter graphiquement  $S_n$ .

b) Montrer que  $\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$ .

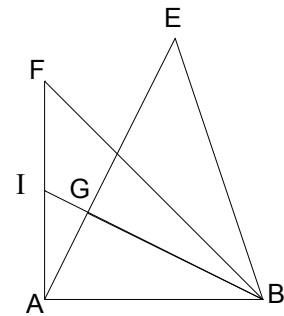
c) En déduire les limites de  $S_n$  et de  $\frac{S_n}{\ln(n)}$ , quand  $n$  tend vers l'infini.

### Exercice 3 ( 5 points)

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel

que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ,

I est le milieu de [AF]. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.



1) Soit  $f$  la similitude directe de centre B, d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de

rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Déterminer les images des points E et F par  $f$ .

2) Soit  $g$  la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que  $g$  est de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ .

b) Déterminer la nature de  $g \circ g$  et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que  $\tan(\widehat{ABI}) = \frac{1}{2}$ . En déduire que  $GB = 2 GA$ .

d) En déduire que G est le centre de  $g$ .

3) Soit  $r = g \circ f$ .

a) Montrer que  $r$  est la rotation de centre F et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

b) Déterminer  $r(E)$ . En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

#### EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives  $z, z^2$  et  $z^3$  où  $z$  est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

( le triangle MNP est rectangle en P ) si et seulement si  $(\frac{1+z}{z})$  est imaginaire pur).

b) On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des réels. Montrer que  $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$ .

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle  $(\Gamma)$  de diamètre  $[OA]$ , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle  $(\Gamma)$  et on a placé un point M d'affixe  $z$  sur  $(\Gamma)$  et son projeté orthogonal H sur l'axe  $(O, \vec{u})$ .

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives  $z^2$  et  $z^3$  tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

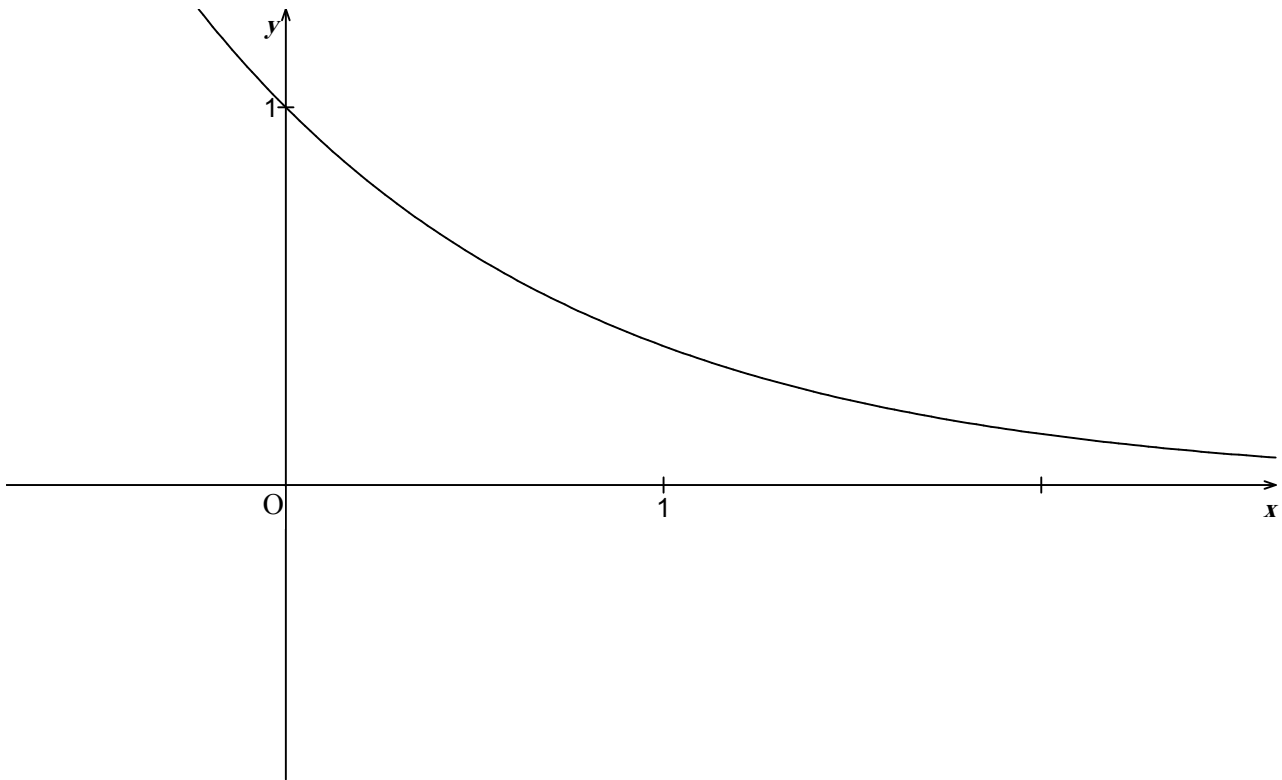
a) Montrer que  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$  puis que  $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$ .

b) Montrer que  $OH = OM^2$ .

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

ANNEXE

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 : figure 2

