

Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Economie et Gestion	Session principale

Exercice 1

1)	2)	3)	4)	5)	6)
b)	c)	c)	c)	b)	a)

On ne demande pas de justification pour ces réponses, mais on va donner quelques explications :

1) $\ln\left(\frac{1}{x+5}\right)$ est définie pour $\mathbb{R}\left(\frac{1}{x+5} > 0\right)$ équivaut à $\mathbb{R}(x+5 > 0)$

2) $g(x)$ est de la forme $\ln(u(x))$ et par $\left(g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

4) La matrice inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Leur produit est égal à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (4,5 points)

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1)a) $\det A = 1 \neq 0$ donc A est inversible.

b) Calculons la matrice $M = 2I_3 - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On trouve $AXM = I_3$ et par suite l'inverse de A est égal à M. On a $A^{-1} = M$.

2) Soit le système (S) :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ -x - y - z = -2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) L'écriture matricielle du système (S) est $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Résolution du système (S) :

$$\text{(S)} \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1,2,-1) est l'unique solution du système (S).

Exercice 3

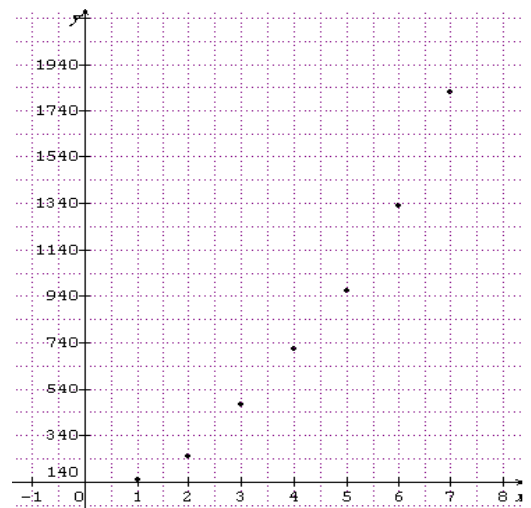
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la dépense annuelle moyenne par personne, exprimée en dinars, tous les cinq ans entre 1970 et 2005.

Période	[1970,1975[[1975,1980[[1980,1985[[1985,1990[[1990,1995[[1995,2000[[2000,2005[
Rang de la période x	1	2	3	4	5	6	7
Dépense moyenne y des dépenses en dinars	147	248	471	716	966	1329	1820

(Source INS)

Le nuage de points ci-contre associé à la série statistique (x, y) dans un repère orthogonal du plan suggère un ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

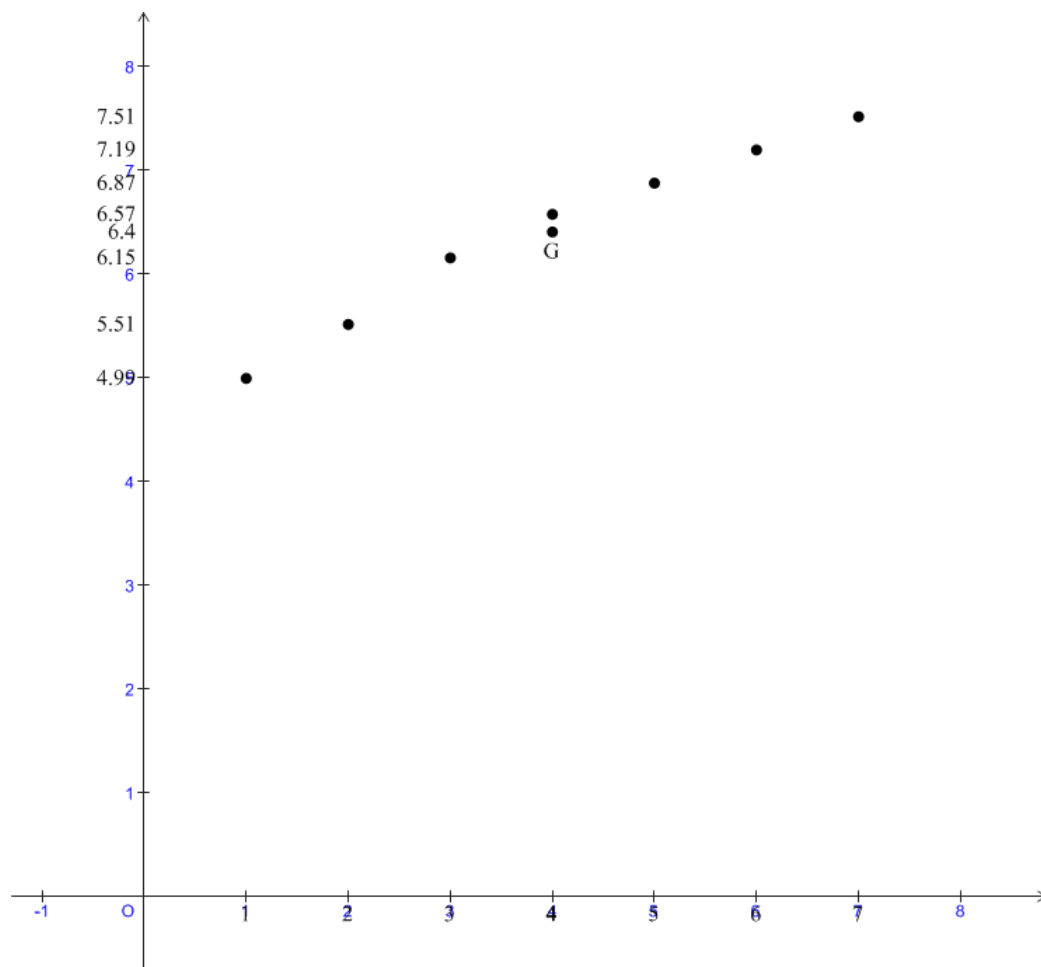


1) a) Tableau de la série statistique (x, z).

x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln(y)$	4,99	5,51	6,15	6,57	6,87	7,19	7,51

b) $\bar{x} = 4$ et $\bar{z} = 6,40$.

c) Nuage de points associé à la série (x, z) et $G(\bar{x}, \bar{z})$.

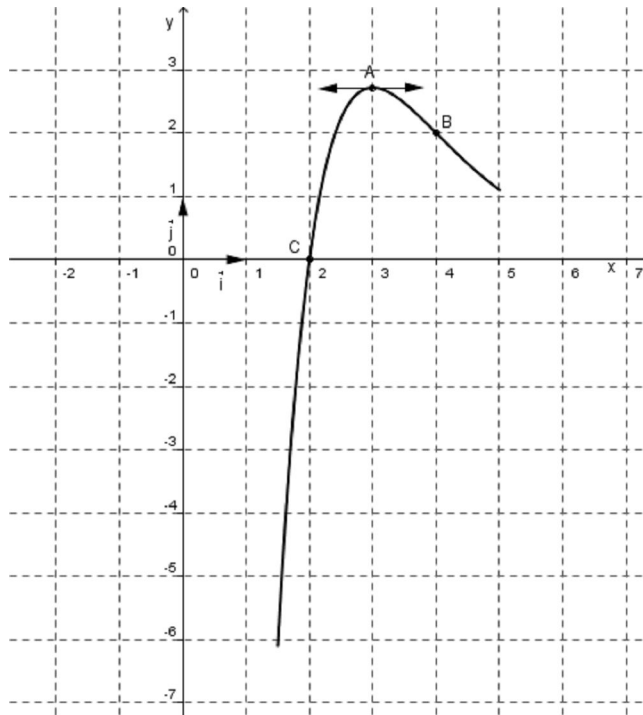


d) droite de régression linéaire (D) de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

C'est $z = 0,42x + 4,74$.

2) a) $y = e^z = e^{0,42x+4,74} = e^{4,74} e^{0,42x} = 114,43e^{0,42x}$.

b) Une estimation de la dépense moyenne, exprimée en dinars, par personne et par an pendant la période $[2010, 2015[$. Pour $x = 9$ on a $y = 114,43e^{3,78} = 5014$ dinars



1) D'après le graphique

- Le solde journalier réalisé sur la vente de 400 unités est égal à 2000 dinars. C'est le point de la courbe de coordonnées (4,2).
- La quantité journalière fabriquée et vendue pour réaliser un bénéfice maximum correspond au point d'abscisse 3. C'est 300.
- La quantité journalière fabriquée et vendue à partir de laquelle l'entreprise ne vend pas à perte correspond au point d'abscisse 2 ; c'est donc 200.

2) Pour tout réel x de l'intervalle $[1,5 ; 5]$, $f(x) = (a x + b) e^{-x+4}$.

- D'après le graphique $f(4)=2$ et $f(2)=0 \iff (4a+b)e^0=2$ et $(2a+b)e^2=0$

$$\iff \begin{cases} 4a+b=2 \\ 2a+b=0 \end{cases} \text{ car } e^0=1 \text{ et } e^2 \neq 0.$$

- On retranche membre à membre les deux équations, on trouve $2a = 2$ d'où $a = 1$
On remplace dans l'une des équations : $2 \times 1 + b = 0$ et par suite $b = -2$.
- Le solde moyen en milliers de dinars, réalisé en une journée

$$S_m = \frac{1}{5-1,5} \int_{1,5}^5 f(x) dx = \frac{2}{7} \int_{1,5}^5 (x-2) e^{-x+4} dx.$$

Intégration par parties

On pose $\begin{matrix} u(x) = x-2 & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x+4} & v(x) = -e^{-x+4} \end{matrix}$ donc

$$S_m = \frac{2}{7} \left[-(x-2)e^{-x+4} + \int_{1,5}^5 e^{-x+4} dx \right]_{1,5}^5 = \frac{2}{7} \left[-(x-2)e^{-x+4} - e^{-x+4} \right]_{1,5}^5 = \frac{2}{7} \left(-3e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} + e^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$S_m = \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{e} \right).$$

$$S_m \approx 1,320$$