REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3h** **COEFFICIENT : 3**

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 6z - 7 + i = 0$ sont $1 + 2i$ et $-1 + 3i$.

3) Soit z et z′ deux nombres complexes non nuls.

Si $\arg(z') \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ alors $z' = \overline{z}$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $(\sqrt{3}+i)^8$ est $2^8 e^{i(\frac{4\pi}{3})}$.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1, 0 ,0), B(0, 2, 0) et C(0, 0, 3).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
   On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.
   a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.
   b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

3) Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O.
   a) Vérifier que (S) passe par les points A, B et C.
   b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 3 (6 points)

I – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
   1) Dresser le tableau de variation de f.
   2) En déduire que pour tout réel x, $e^x - x \geq 1$.

II – Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_g d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
   La droite d'équation x = 0 est une asymptote à la courbe C_g.
   La courbe C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

1) a) Déterminer $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=e^{g(x)}$ et soit C_h sa courbe représentative .

a) Calculer $h(1)$, $h(2)$ et $h(3)$.

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

c) En écrivant $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \dfrac{g(x)}{x}$, pour $x > 2$, montrer que la courbe C_h admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

3) Soit $\alpha > 0$.
On note M et N les points des courbes C_g et C_h d'abscisse α .

a) Calculer la distance MN en fonction de $g(\alpha)$.

b) Montrer que la distance MN est minimale lorsque $\alpha = 2$.

4) Tracer la courbe C_h dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle $[a, a+1]$.

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{a+1}$.

b) Déduire que $\dfrac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \dfrac{1}{a}$. (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer, en utilisant (1), que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$.

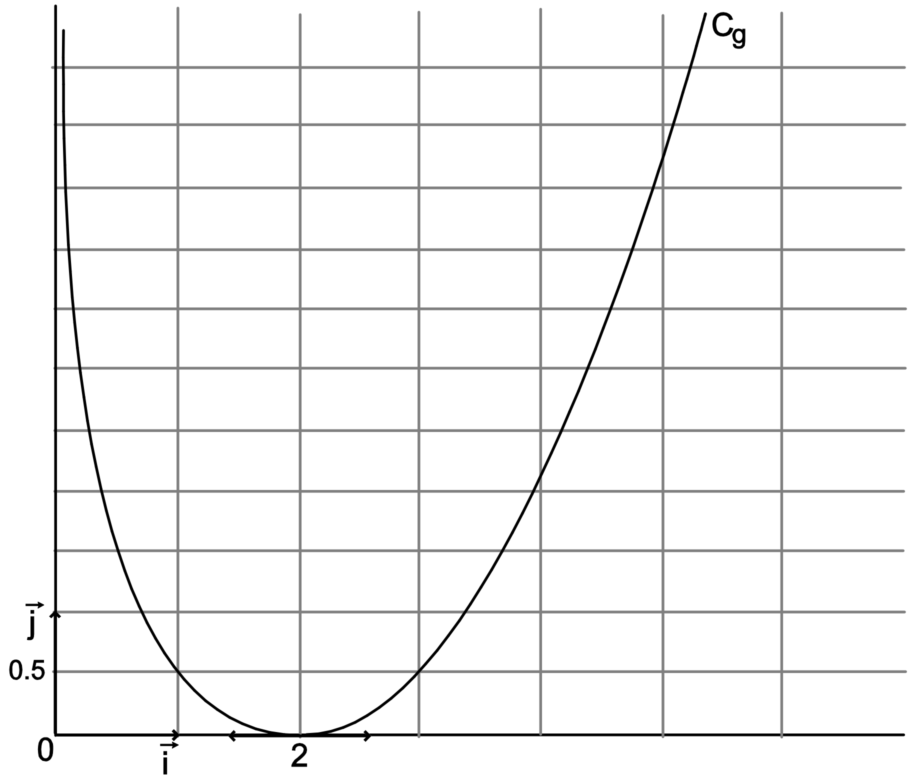
b) En déduire $\lim\limits_{n\to +\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{S_n}$.

3) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.



C_g
$\vec{j}$
0.5
0
$\vec{i}$
2