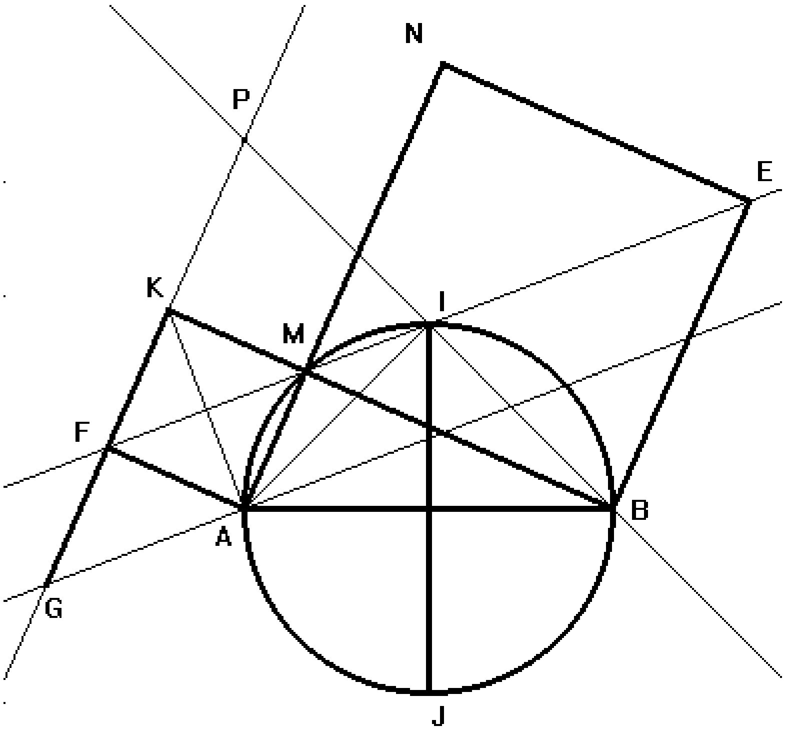
Corrigé de la Session Principale (Juin 2010)

Exercice 1

1) faux   2) vrai   3) faux   4) faux   5) vrai   6) vrai

Exercice 2



1°)

$$\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{ME}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ME}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \quad \pi[2\pi]$$

Donc les points E, M et F sont alignés.

2°) a) *$r_1 o r_2$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ donc $r_1 o r_2$ est une symétrie centrale.*

$r_1 o r_2(I) = r_1(J) = I$ car AJBI est un carré direct

*donc **$r_1 o r_2$ est la symétrie centrale de centre I.***

b) *$r_1 o r_2(E) = r_1(M) = F$.*

$r_1 o r_2(E) = F$ et $r_1 o r_2$ est la symétrie centrale de centre I, donc I est le milieu de [EF]

.

*Par suite , **lorsque M varie , la droite (EF) passe par le point fixe I**.*

3°) *S est la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.*

a) *On a* $\begin{cases} \dfrac{AK}{AM} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ *donc S(M)=K*

b) *On pose S(F) = G*

On a AMF est un triangle réctangle isocèle de sommet principal A, donc S(AMF)=AKG est un triangle réctangle isocèle de sommet principal S(A) = A.

D'où la construction de G

c) *AKG est un triangle réctangle isocèle de sommet principal A et* $\left(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right)\ (2\pi)$,

donc $[AF)$ *est la bissectrice intérieure de l'angle* $\left(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AG}\right)$ *par suite F est le milieu du segment [KG]*

d) *S(M) = K et S(F) = G d'où S (MF) = (GK)= (KF) or (MF) passe par le point fixe I, donc (KF) passe par le point fixe P = S(I) .*

S(I)= P donc $\begin{cases} \dfrac{AP}{AI} = \sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AP}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ *d'où AIP est un triagle rectangle isocèle de sommet principal I.*

Exercice 3

1°) *Si α est un réel non nul, alors les affixes des points M, N et P sont des réels, donc les points M, N et P sont sur l'axes des réels par suite ils sont alignés.*

2°) *MNAP est un parallélogramme* $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$

.

$$\Rightarrow Z_N - Z_M = Z_A - Z_P$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -2 - \frac{8}{\alpha}$$
$$\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 = -4\alpha - 16$$
$$\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$$

Conclusion : Si MNAP est un parallélogramme alors α est une solution de l'équation (E).

3°) $\alpha = 1 + \sqrt{3}$

a) $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$ *et* $\frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) $\frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$ *et* $\frac{8}{\alpha} == 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.,. ¨

On a $\begin{cases} z_{\overrightarrow{MN}} = -3 + 3i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3} \\ z_{\overrightarrow{PA}} = -2 - 2 + 2i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$ *donc* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$

Et on a $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right)\neq 0$ *c'est-à-dire que les points A, M et N ne sont pas alignés*

donc MNAP est un parallélogramme.

4°)a) *α est une solution de (E)* $\Rightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$

$$\Rightarrow \overline{3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16} = 0$$

$$\Rightarrow 3\left(\overline{\alpha}\right)^3 - 2\left(\overline{\alpha}\right)^2 + 4\overline{\alpha} + 16 = 0$$

$\Rightarrow \overline{\alpha}$ *est une solution de (E).*

Donc ***si α est une solution de (E) alors*** $\overline{\alpha}$ ***est une solution de (E).***

b) *D'après a) Si MNAP est un parallélogramme alors α et* $\overline{\alpha}$ *sont des solutions de (E).*
Pour $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$*, MNAP est un parallélogramme , donc* $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $\overline{\alpha} = 1 - i\sqrt{3}$ *sont des solutions de (E).*

Par suite, pour tout nombre complexe z, $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 =$
$3(z-\alpha)\left(z-\overline{\alpha}\right)(z-\beta)$ avec $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

Par identification on obtient , - 12β = 16 donc $\beta = -\dfrac{4}{3}$.

Les solutions de (E) son donc t : $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$ *et* $\dfrac{-4}{3}$

- *La solution* $\dfrac{-4}{3}$ *est inacceptable car α est non réel.*
- *Pour* $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$ *on a* $\begin{cases} z_{\overrightarrow{MN}} = -3 - 3i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} = -4 - 2i\sqrt{3} \\ z_{\overrightarrow{PA}} = -2 - 2 - 2i\sqrt{3} = -4 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$

  donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$*, Par suite MNAP est un parallélogramme.*

Conclusion ***: Les affixes des points M pour lesquelles MNAP est un parallélogramme sont*** $1 + i\sqrt{3}$ ***et*** $1 - i\sqrt{3}$**.**

Exercice 4

1°) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - x\ln x + x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = -\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = -\infty$$

b) *f est dérivable sur]0, +∞[et on a pour tout x* > 0 $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

***2°) a)** Pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x) - h(x)$.*

x	0		β		$+\infty$
Position		$\mathcal{C}_g$ *au dessus de* $\mathcal{C}_{gh}$		$\mathcal{C}_g$ *au dessous de* $\mathcal{C}_h$	
$f'(x) = g(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	

***b)** f est croissante sur $]0 , \beta]$ et décroissante sur $[\beta, +\infty[$*

***c)** On a $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en un point d'abscisse $\beta>0$,donc $h(\beta) = g(\beta)$ d'où* $\ln\beta = \dfrac{1}{\beta}$.

Par suite $f(\beta) = \ln\beta - \beta\ln\beta + \beta = \dfrac{1}{\beta} - 1 + \beta = \dfrac{1}{\beta} + \beta - 1$

***3°)a)** Pour tout $x>0$, $f(x) - h(x) = x(1 - \ln x)$. Le signe de $f(x) - h(x)$ est celui de $1 - \ln x$.*

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - h(x)$		$+$	0	$-$	
Position		$\mathcal{C}_f$ ***au dessus de*** $\mathcal{C}_h$		$\mathcal{C}_f$ ***au dessous de*** $\mathcal{C}_h$	

Les deux courbes se coupent au point d'abscisse e.

b)

x	0		β		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

On a :

➢ $\begin{cases} f \text{ est continue et strictement croissante sur }]0,\beta] \\ f\,(]0,\beta]) =]-\infty, f(\beta)] \end{cases}$

0 *car* $f(\beta) > 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ coupe (x'x) en un seul point d'abscisse $x_1 \in]0,\beta]$

Et on a encore $f(0.4) \times f(0.5) = [\ln(0.4) - (0.4)\ln(0.4) + 0.4][\ln(0.5) - (0.5)\ln(0.5) + 0.5] \approx -0.02 < 0$

Donc $\mathbf{0.4 < x_1 < 0.5}$

➢ $\begin{cases} f \text{ est continue et strictement décroissante sur } [\beta , +\infty [\\ f\,([\beta, +\infty[) =]-\infty , f(\beta)] \end{cases}$

0 *car* $f(\beta) > 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ *coupe (x'x) en un seul point d'abscisse* $x_2 \in [\beta , +\infty [$

Et on a encore $f(3.8)\times f(3.9)=[\ln(3.8)-(3.8)\ln(3.8)+3.8][\ln(3.9)-(3.9)\ln(3.9)+3.9]$

$\approx -2.9 < 0$

Donc $\mathbf{3.8 < x_2 < 3.9}$

En conclusion : ***la courbe*** $\mathcal{C}_f$ ***coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives*** x_1 ***et*** x_2 ***telles que*** $0.4 < x_1 < 0.5$ ***et*** $3.8 < x_2 < 3.9$

c) *Voir graphique*

Soit les points $I(1,0)$, $C(0, f(\beta))$ *et* $D(\beta, f(\beta))$.

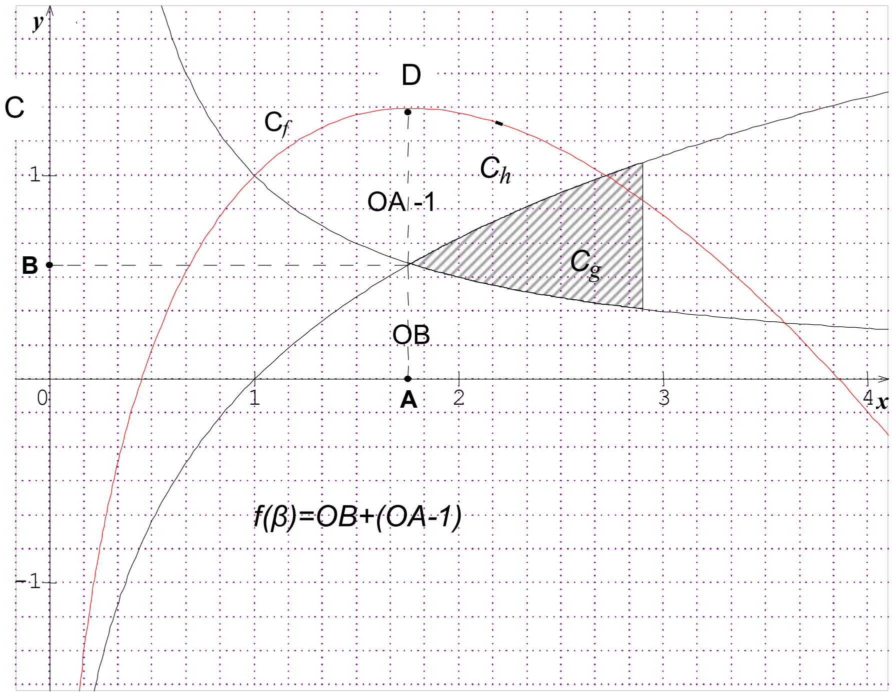
On a $f(\beta)=\frac{1}{\beta}+\beta-1$ *alors* $f(\beta) - 1/\beta = \beta - 1$ *donc* $OC - OB = OA - OI > 0$ *donc* $BC = AI$

alors C est le point de [OB)\ [OB] et tel que BC = AI

donc le point D est le point du plan admettant les points A et C comme projetés orthogonaux sur les axes.

d) $\mathcal{C}_f$ *admet :*

- *une tangente horizontale au point d'abscisse β.*
- *une branche parabolique de direction (yy') au voisinage de +∞.*
- *l'axe des ordonnées comme asymptote.*



$$\textbf{4°)a)}\ \mathcal{A}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^{\beta} g(x)-h(x)dx \ \ si\ 0<t<\beta \\ \displaystyle\int_{\beta}^{t} h(x)-g(x)dx \ \ si\ t>\beta \end{cases} = \begin{cases} \displaystyle\int_t^{\beta} f'(x)dx \quad si\ 0<t<\beta \\ \displaystyle\int_{\beta}^{t} -f'(x)dx \quad si\ t>\beta \end{cases} = f(\beta)-f(t)$$

b) *Voir graphique*

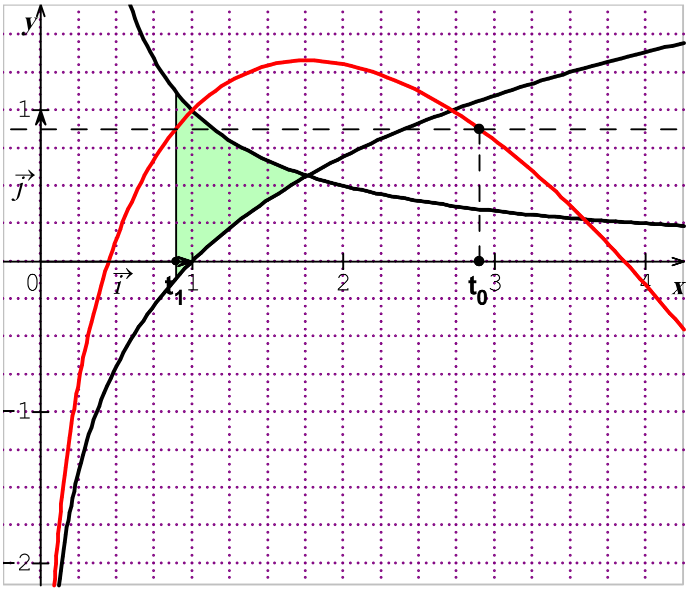
c) $t_1 \in]0, \beta[$, $t_0 \in]\beta, +\infty[$

$\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0) \Leftrightarrow f(\beta) - f(t_1) =$ $f(t_0)$

$\Leftrightarrow f(t_1) = f(t_0)$

Or $f(t_0) \in]-\infty, f(\beta)[$ *et f réalise une bijection de]0,* *sur* $]-\infty, f(\beta)[$ *, donc*

il existe un seul réel $t_1 \in]0, \beta[$ *tel que* $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$



Exercice 5

1°) *La fonction* $t \to e^{\sqrt{t}}$ *est continue et positive sur [1 , 2], donc*

$$V = \int_1^2 \pi\left(e^{\sqrt{t}}\right)^2 dt. \quad = \quad \pi\int_1^2 e^{\sqrt{4t}}dt = \pi F(2)$$

2°) a) *La fonction :* $t \mapsto e^{\sqrt{4t}}$ *est continue sur [0 , +∞[et 1∈[0 , +∞[donc F est dérivable*

sur [1, +∞[et on a pour tout x [1, +∞[, $F'(x) = e^{\sqrt{4x}}$

La fonction : $x \mapsto \sqrt{4x}$ *est dérivable sur [1, +∞[et la fonction :*$t \mapsto te^t$ *est continue sur* $\mathbb{R}$

donc la fonction G est dérivable sur [1, +∞[et on a pour tout x ∈ [1, +∞[

G'(x) *=* $(\sqrt{4x})'.\ (\sqrt{4x}[\square])e]^{\sqrt{4x}}$ $=2e^{\sqrt{4x}}$ ***=2F'(x)***

b) *Pour tout x ∈ [1, +∞[,* $2F(x) = 2F(x) - 2F(1) = \int_1^x 2F'(t)dt = \int_1^x G'(t)dt = G(x) - G(1)$.

3°)a)*Soit x ∈ [1, +∞[,* $G(x)= \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.

On effectue une Intégration par partie :

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ \end{cases}$

$v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$

Pour tout x ∈ *[1, +∞[,* $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt = \left[te^t\right]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} e^t dt = \sqrt{4x}e^{\sqrt{4x}} - e - e^{\sqrt{4x}} + e = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

b) $V = \pi F(2) = \pi \frac{G(2) - G(1)}{2} = \pi \frac{\left(\sqrt{8} - 1\right)e^{\sqrt{8}} - e^2}{2}$