

**EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010**

**SECTION : MATHEMATIQUES**  
**EPREUVE : MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4h**

**COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

**Exercice 1 (3 points)**

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

- 1) Le quotient de  $(-23)$  par  $(-5)$  est 4.
- 2) Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers tels que  $64a + 9b = 1$  alors les entiers  $b$  et  $64$  sont premiers entre eux.
- 3)  $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$ .
- 4)  $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$  équivaut à  $x \equiv 0 \pmod{8}$ .
- 5) Si  $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$  alors  $x \equiv 19 \pmod{20}$ .
- 6) Si  $p$  est un entier premier distinct de 2 alors  $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Exercice 2 (4 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe,  $[AB]$  et  $[IJ]$  sont deux diamètres perpendiculaires du cercle  $(\mathcal{C})$ ,  $M$  est un point variable du cercle  $(\mathcal{C})$  tel que  $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$  et  $MBEN$  et  $MKFA$  sont des carrés de sens direct.

- 1) Montrer que les points  $E$ ,  $F$  et  $M$  sont alignés.
- 2) On désigne par  $r_1$  et  $r_2$  les rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centres respectifs  $A$  et  $B$ .
  - a) Montrer que  $r_1 \circ r_2$  est la symétrie centrale de centre  $I$ .
  - b) Déterminer  $r_1 \circ r_2(E)$ . En déduire que lorsque  $M$  varie, la droite  $(EF)$  passe par un point fixe que l'on déterminera.
- 3) Soit  $S$  la similitude directe de centre  $A$ , d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .
  - a) Déterminer  $S(M)$ .
  - b) Construire le point  $G$  image de  $F$  par  $S$ .
  - c) Montrer que  $F$  est le milieu du segment  $[KG]$ .
  - d) En déduire que lorsque  $M$  varie, la droite  $(KF)$  passe par un point fixe  $P$ . Construire  $P$ .

### Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note A le point d'affixe  $-2$ .

On considère l'équation (E) :  $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  et M, N et P les points d'affixes respectives  $\alpha$ ,  $\frac{3}{2}\alpha^2$  et  $\frac{8}{\alpha}$ .

1) Montrer que si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que  $\alpha$  n'appartient pas à  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors  $\alpha$  est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend  $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ .

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes  $\alpha$ ,  $\frac{3}{2}\alpha^2$  et  $\frac{8}{\alpha}$ .

Placer dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes  $\frac{3}{2}\alpha^2$  et  $\frac{8}{\alpha}$ .

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si  $\alpha$  est une solution de (E) alors  $\bar{\alpha}$  est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

### Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln x - x \ln x + x$ .

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

b) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ .

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe,  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$  sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  des fonctions g et h définies sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \ln x.$$

$\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$  se coupent en un point d'abscisse  $\beta$ .

a) Par une lecture graphique donner le signe de  $f'(x)$ .

b) En déduire le sens de variation de f.

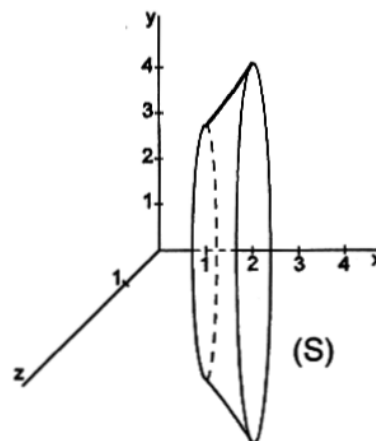
c) Montrer que  $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$ .

- 3) On désigne par  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- Etudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_h$ .
  - Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives  $x_1$  et  $x_2$  telles que  $0,4 < x_1 < 0,5$  et  $3,8 < x_2 < 3,9$ .
  - Placer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $A(\beta, 0)$  et  $B(0, \frac{1}{\beta})$  et en déduire une construction du point de coordonnées  $(\beta, f(\beta))$ .
  - Tracer  $\mathcal{C}_f$ .
- 4) Pour tout réel  $t$  de  $]0, +\infty[ \setminus \{\beta\}$ , on désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'aire de la partie du plan  $S(t)$  limitée par les courbes  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$  et la droite d'équation  $x = t$ .
- Montrer que pour tout réel  $t \in ]0, +\infty[ \setminus \{\beta\}$ ,  $\mathcal{A}(t) = f(\beta) - f(t)$ .
  - Soit  $t_0 > \beta$ . Hachurer  $S(t_0)$ .
  - Montrer qu'il existe un réel unique  $t_1$  dans  $]0, \beta[$  tel que  $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_0)$ .  
Hachurer  $S(t_1)$ .

### Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution  $(S)$  est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation  $y = e^{\sqrt{x}}$ ,  $x \in [1, 2]$  autour de l'axe  $(Ox)$ .

Le but de cet exercice est de calculer le volume  $\mathcal{V}$  de ce solide.



- Soit  $F$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}} dt$ .  
Vérifier que  $\mathcal{V} = \pi F(2)$ .
- Soit  $G$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$ .
  - Montrer que  $G$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et que  $G'(x) = 2 F'(x)$ .
  - En déduire que pour tout réel  $x$  de  $[1, +\infty[$ ,  $2 F(x) = G(x) - G(1)$ .
- Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[1, +\infty[$ ,  $G(x) = (\sqrt{4x} - 1)e^{\sqrt{4x}}$ .
  - Calculer alors  $\mathcal{V}$ .

figure (1)

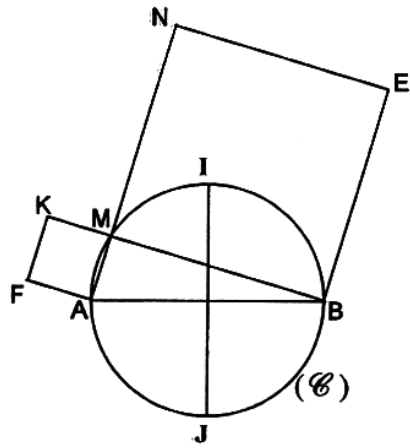


figure (2)

