CORRIGE

Exercice 1 :

- ✓ **Contenu :** Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul, équation complexe du second degré, forme exponentielle d'un nombre complexe non nul et interprétation géométrique.
- ✓ **Aptitudes visées :** reconnaitre une racine $5^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, vérifier une équation complexe, écrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer un lieu géométrique d'un point variable.
- ✓ **Corrigé :**

Les choix corrects sont :

1°) Vrai : Si $u^5 = v^5 = 1$ alors $(u.v)^5 = 1$

2°) Vrai : il suffit de faire une vérification.

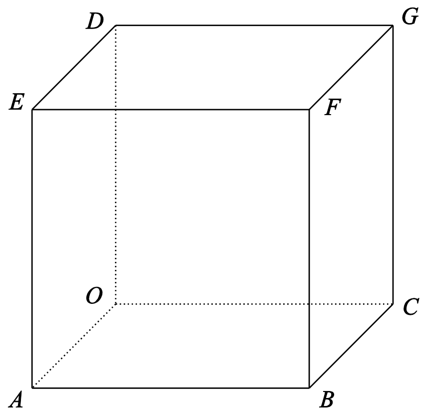
3°) Faux : Un argument du nombre complexe $z = -5e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $\frac{7\pi}{6}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$

4°) Vrai : θ décrit seulement l'intervalle $[0,\pi]$ (demi- cercle)

Exercice 2 :

- ✓ **Contenu :** produit vectoriel, équations de droites, plans et sphères de l'espace, positions relatives de plans et sphères.
- ✓ **Aptitudes visées :** calculer un produit vectoriel, déterminer une représentation paramétrique d'une droite et une équation cartésienne d'un plan, reconnaitre une à partir de son équation, étudier la position relative d'une sphère et un plan.
- ✓ **Corrigé :**

1°) a°)



Dans le repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$, on a : $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ et $D(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et , par conséquent , $(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1°) b°) Le vecteur $(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ACD) , d'où :

$$(ACD): x+y+z+d=0 \quad , \; d\in\mathbb{R} \; .$$

L'écriture $A(1,0,0)\in(ACD) \iff 1+d=0 \iff d=-1$ permet alors de conclure :

$(ACD): x+y+z-1=0$.

2°) a°) Le vecteur $(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD})\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

Le point $O(0,0,0)$ est un point de la droite (Δ) .

Alors $(\Delta):\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \quad , \ \alpha\in\mathbb{R}$.

2°) b°) $H(x_H, y_H, z_H)\in(\Delta)\cap(ACD) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_H=\alpha \\ y_H=\alpha \\ z_H=\alpha \\ x_H+y_H+z_H-1=0 \end{cases} \ \alpha\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_H=\alpha \\ y_H=\alpha \\ z_H=\alpha \\ 3\alpha-1=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_H=\frac{1}{3} \\ y_H=\frac{1}{3} \\ z_H=\frac{1}{3} \end{cases}$

Donc $\quad H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

3°) a°) Pour tout $m\in\mathbb{R}$, on a:

$$(\mathscr{S}_m): x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2mz-1+3m^2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\mathscr{S}_m): (x-m)^2-m^2+(y-m)^2-m^2+(z-m)^2-m^2-1+3m^2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\mathscr{S}_m): (x-m)^2+(y-m)^2+(z-m)^2=1$$

On en déduit que l'ensemble $(\mathscr{S}_m)$ est une sphère de centre $I_m(m,m,m)$ et de rayon $R=1$.

3°) b°) $(\mathscr{S}_m)$ passe par le point $A \Leftrightarrow A(1,0,0)\in(\mathscr{S}_m)$

$$\Leftrightarrow \quad (1-m)^2+(0-m)^2+(0-m)^2=1$$
$$\Leftrightarrow \quad 3m^2-2m=0$$
$$\Leftrightarrow \quad m=0 \quad \underline{\underline{\text{ou}}} \quad m=\frac{2}{3}$$

4°) a°) On a : $I_0(0,0,0)\in(\Delta)$.

On a : $I_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\in(\Delta)$.

En fait : Pour tout $m\in\mathbb{R}$, $I_m(m,m,m)\in(\Delta)$: Les sphères $(\mathscr{S}_m)$ sont , toutes , centrées sur (Δ) .

4°) b°) Plusieurs méthodes sont possibles :

<u>Méthode 1</u> :

Toutes les sphères $(\mathscr{S}_m)$ étant centrées sur la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ACD) , le projeté orthogonal H de leurs centres I_m sur le plan (ACD) est le même , à savoir $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ (déterminé à la question **2°) b°)**) .

En particulier , les deux sphères $(\mathscr{S}_0)$ et $(\mathscr{S}_{\frac{2}{3}})$, de même rayons $R_0=R_{\frac{2}{3}}=1$ coupent le plan (ACD) puisque le point $A\in(ACD)$ appartient également , selon **3°) b°)** , aux deux sphères $(\mathscr{S}_0)$ et $(\mathscr{S}_{\frac{2}{3}})$) , suivant un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre $H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $HA=...=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

<u>Méthode 2</u> :

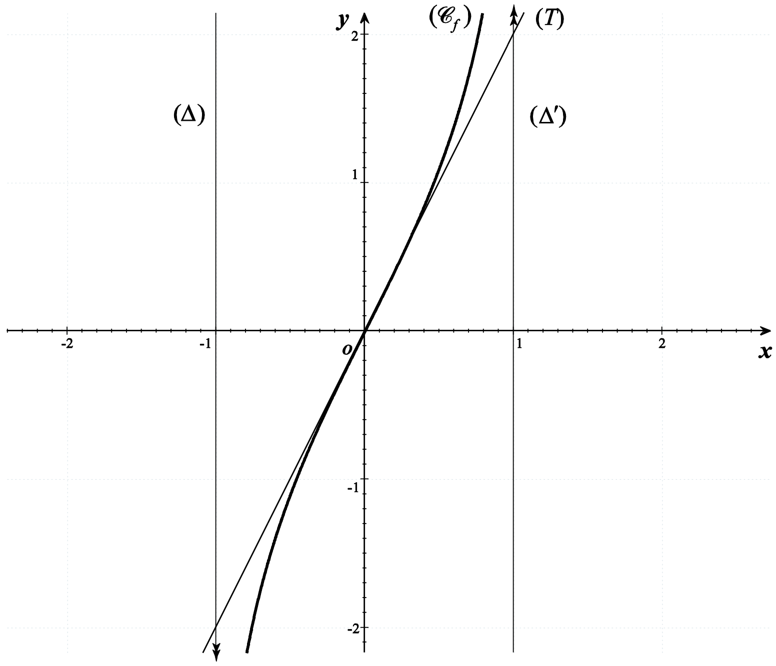
On a : $\begin{cases} (\mathscr{S}_0): x^2+y^2+z^2=1 \\ (\mathscr{S}_{\frac{2}{3}}): \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=1 \end{cases}$

Comme les trois points $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ et $D(0,0,1)$ appartiennent , tous les trois , aussi bien à la sphère $(\mathscr{S}_0)$ qu'à la sphère $(\mathscr{S}_{\frac{2}{3}})$ (aisément vérifiable) , ces deux dernières se coupent alors suivant un même cercle , à savoir , le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC .

Exercice 3 :

- ✓ **Contenu :** Etude de fonctions , fonction réciproque, courbe d'une fonction, calcul intégral, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** lire graphiquement une courbe, déterminer la réciproque d'une fonction bijective et construire sa courbe, calculer une aire.
- ✓ **Corrigé :**

1°)



$f(0) = 0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

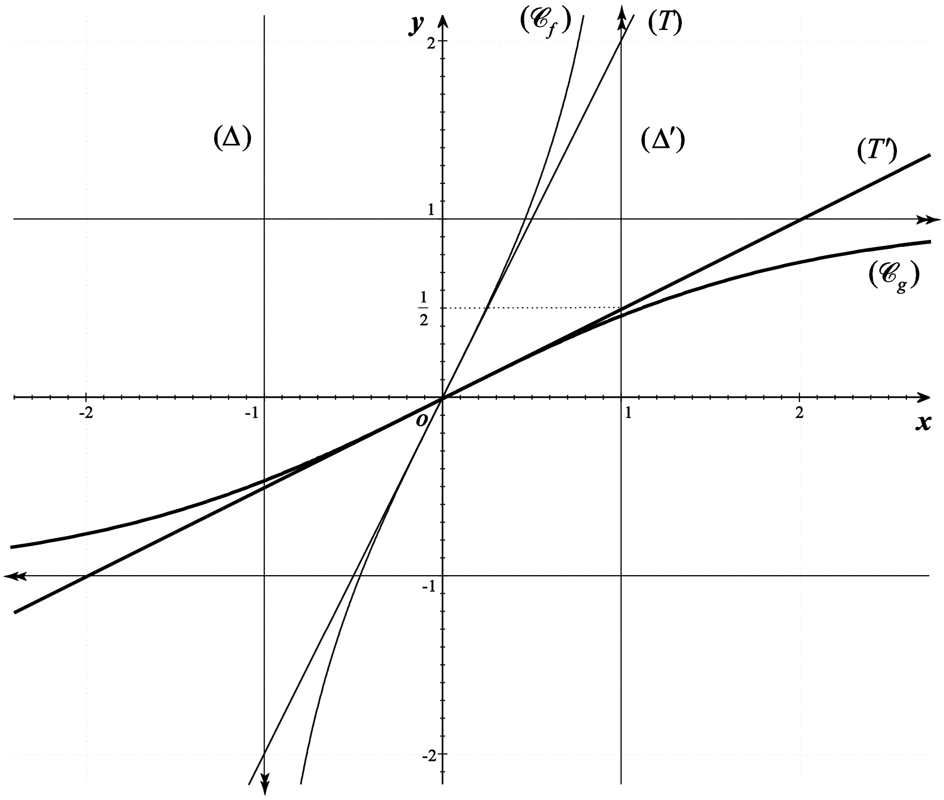
$f'(0) = 2$: lecture graphique de la pente de la droite (T) , tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point O

2°) a°) $g(0) = 0$: g étant la fonction réciproque de f , on a l'équivalence $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

$g'(0) = \frac{1}{2}$: formule de dérivée d'une réciproque : $g'(0) = \dfrac{1}{f'\big(g(0)\big)} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.

2°) b°) Le tracé est jugé sur la présence des quatre éléments suivant :

- Tracé correct de deux asymptotes horizontales d'équations cartésiennes $y = 1$ et $y = -1$
- Tracé correct d'une droite (T') tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point O , de pente $\frac{1}{2}$.
- Tracé correct de l'allure de $(\mathscr{C}_g)$



3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{e^x(e^x+b)-e^x(e^x+a)}{(e^x+b)^2} = \dfrac{(b-a)e^x}{(e^x+b)^2}$.

D'après les résultats établis en **2°) a°)** on a :

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{1+b}=0 \\ \dfrac{b-a}{(1+b)^2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a=0 \\ 2(b-a)=(1+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 2(b+1)=(1+b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Enfin , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

$\boxed{\textbf{Note}}$ **:** Méthode alternative : Une autre mise en équation est possible : $\begin{cases} g(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{1+b}=0 \\ \dfrac{a}{b}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$ ....

4°) a°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

4°) b°) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$, d'après **4°) a°)** .

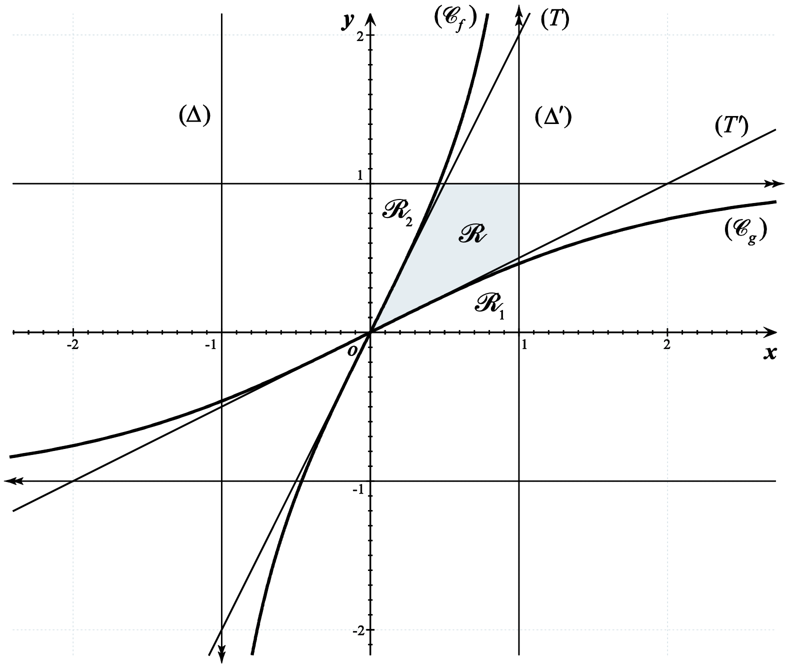
$= \Big[\ln(e^x+1)\Big]_0^1 - \Big[-\ln(e^{-x}+1)\Big]_0^1 = \Big[\ln(e^x+1)+\ln(e^{-x}+1)\Big]_0^1 = \Big[\ln(e^x+1)+\ln(e^x+1)-x\Big]_0^1$

$= \Big[2\ln(e^x+1)-x\Big]_0^1 = 2\ln(e+1)-1-2\ln 2$

$= 2\ln(e+1)-2\ln 2-1$

$\boxed{\textbf{Note}}$ **:** Plusieurs autres résultats finaux sont possibles .

5°) a°) L'aire $\mathscr{A}$ demandé est celle de la région $\mathscr{R}$ du plan, décrite dans l'énoncé, et hachurée dans la figure suivante :



L'aire $\mathscr{A}$ de cette région $\mathscr{R}$, est celle du carré unité , duquel on soustrait les deux aires des deux régions $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ définies par :

$\mathscr{R}_1$: domaine limité par les droites d'équations respectives $y=0$ et $x=1$ et la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

$\mathscr{R}_2$: domaine limité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

On a ainsi : $\mathscr{A}(\mathscr{R})=1-\left[\mathscr{A}(\mathscr{R}_1)+\mathscr{A}(\mathscr{R}_2)\right]$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on a : $\mathscr{A}(\mathscr{R}_2)=\mathscr{A}(\mathscr{R}_1)=\int_0^1 g(x)\,dx$.

On en déduit alors que $\mathscr{A}=\mathscr{A}(\mathscr{R})=1-2\mathscr{A}(\mathscr{R}_1)=1-2\int_0^1 g(x)\,dx$.

5°) b°) On a : $\mathscr{A}=1-2\int_0^1 g(x)\,dx=1-2\left[2\ln(e+1)-2\ln 2-1\right]=3+4\ln 2-4\ln(e+1)$ $\quad(\,ua\,)$

Exercice 4 :

- ✓ **Contenu :** suites réelles, raisonnement par récurrence, suites adjacentes, convergence d'une suite, limite d'une suite.
- ✓ **Aptitudes visées :** montrer une proposition par récurrence, montrer que deux suites sont adjacentes, déterminer la limite d'une suite.
- ✓ **Corrigé :**

1°) a°) On a : $t_0=v_0-u_0=2-1=1$.

On a : $t_1=v_1-u_1=\left[(1-\alpha)u_0+\alpha v_0\right]-\left[\alpha u_0+(1-\alpha)v_0\right]=1-\alpha+2\alpha-\alpha-2(1-\alpha)=2\alpha-1$.

1°) b°) Deux approches peuvent être adoptées :

<u>Méthode 1</u> : (Utilisation du principe de raisonnement par récurrence) :

- Initialisation :

Pour $n=0$, on a : $t_0=1=(2\alpha-1)^0$, ($\alpha\neq\frac{1}{2}$) .

- Preuve de l'hérédité :

Soit $p\in\mathbb{N}$, un entier naturel quelconque.

Supposons que $t_p = (2\alpha - 1)^p$ (hypothèse de récurrence) .

Montrons que $t_{p+1} = (2\alpha - 1)^{p+1}$.

On a $t_{p+1} = v_{p+1} - u_{p+1} = \left[(1-\alpha)u_p + \alpha v_p\right] - \left[\alpha u_p + (1-\alpha)v_p\right] = (1-2\alpha)u_p + (2\alpha-1)v_p$

$= (2\alpha-1)\left(v_p - u_p\right) = (2\alpha-1)t_p = (2\alpha-1)(2\alpha-1)^p$ (d'après l' hypothèse de récurrence)

$= (2\alpha-1)^{p+1}$

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = (2\alpha-1)^n$

<u>Méthode 2</u> : (Utilisation des suites géométriques) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \left[(1-\alpha)u_n + \alpha v_n\right] - \left[\alpha u_n + (1-\alpha)v_n\right] = (1-2\alpha)u_n + (2\alpha-1)v_n$

$= (2\alpha-1)\left(v_n - u_n\right) = (2\alpha-1)t_n$

$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi une suite géometrique de premier terme $t_0 = 1$ et de raison $q = 2\alpha - 1$.

Son terme général t_n s'écrit alors : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 q^n = (2\alpha-1)^n$.

1°) c°) Le réel α vérifie $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ou encore $(2\alpha - 1) \in \left]0,1\right[$.

Par conséquent on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (2\alpha-1)^n = 0$, puisque $(2\alpha-1) \in \left]-1,1\right[$.

2°) a°) Etudions le signe de $u_n - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -t_n = -(2\alpha-1)^n \le 0$ puisque $2\alpha - 1 > 0$.

On en déduit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \le 0 \iff u_n \le v_n$

2°) b°)

◘ Sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \left[\alpha u_n + (1-\alpha)v_n\right] - u_n = (1-\alpha)(v_n - u_n) = (1-\alpha)\ t_n \ge 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante.

◘ Sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \left[(1-\alpha)u_n + \alpha v_n\right] - v_n = (\alpha-1)(v_n - u_n) = (\alpha-1)\ t_n \le 0$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante.

2°) c°) Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont ainsi adjacentes et convergent, par conséquent, vers une même limite ℓ.

2°) d°)

◘ Montrons que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3$.

Deux approches peuvent être adoptées :

<u>Méthode 1</u> : (Utilisation du principe de raisonnement par récurrence) :

- Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$

- Preuve de l'hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$, un entier naturel quelconque.

Supposons que $u_p + v_p = 3$ (hypothèse de récurrence).

Montrons que, $u_{p+1} + v_{p+1} = 3$

$u_{p+1}+v_{p+1}=\left[(1-\alpha)u_p+\alpha v_p\right]-\left[\alpha u_p+(1-\alpha)v_p\right]=u_p+v_p=3$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

• Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n+v_n=3$

<u>Méthode 2</u> : (Utilisation de suites constantes) :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}+v_{n+1}=\left[(1-\alpha)u_n+\alpha v_n\right]+\left[\alpha u_n+(1-\alpha)v_n\right]=u_n+v_n$

La suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi constante, et on a : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n+v_n=u_0+v_0=3$

◘ Déduisons la valeur de la limite commune ℓ.

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes et convergeant vers une même limite ℓ, on a , par passage à la limite dans la relation $u_n+v_n=3$: $2\ell=3 \Leftrightarrow \ell=\dfrac{3}{2}$.