Section: Sciences Expérimentales **Session de contrôle 2009**

Matière : Mathématiques (Corrigé)

Exercice n°1 (3 points)

- **Contenu :** Suites réelles – Fonctions numériques – Intégrales.
- **Aptitudes visées :** Décider de la convergence d'une suite réelle, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et celui de la moyenne, calculer une limite, appliquer la propriété relative à l'intégrale et l'ordre.
- **Corrigé :**

1) b 2) b 3) b 4) a

Exercice n°2 (3 points)

- **Contenu :** Suites réelles – Fonctions numériques – Intégrales.
- **Aptitudes visées :** Décider de la convergence d'une suite réelle, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et celui de la moyenne, calculer une limite, appliquer la propriété relative à " intégrale et ordre ".
- **Corrigé :**

1)

$\mathcal{C}_f$	$\mathcal{C}_g$	$\mathcal{C}_h$
$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_1$

2) a- $I = \int_{1/e}^{2} x\ln x \, dx$, on intègre par parties : on pose $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{1/e}^{2} - \frac{1}{2}\int_{1/e}^{2} x \, dx = \left(2\ln 2 + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_{1/e}^{2} = 2\ln 2 - 1 + \frac{3}{4e^2}\right) u.a$$

b- $V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{2} f^2(x) \, dx = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{2} (1 + x\ln x) \, dx = \pi\left(\int_{\frac{1}{e}}^{2} 1.dx + I\right) = \pi\left(2\ln 2 + 1 + \frac{3 - 4e}{4e^2}\right) u.v$

Exercice n°3 (3 points)

- **Contenu :** Probabilité : loi exponentielle.
- **Aptitudes visées :** Exploiter la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle pour calculer des probabilités.

- ✓ **Corrigé :**

On désigne par X la variable aléatoire : la durée de vie d'une machine exprimée en années.

X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1) $p\ (2 \leq X \leq 4) = e^{-0,4} - e^{-0,8} = 0{,}22$.

2) $p\ (X \geq 2) = e^{-0,4} = 0{,}67$

3) Soit A l'événement : « Au moins une machine parmi les 4 dépasse deux ans » , alors son évènement contraire est $\overline{A}$: « Aucune machine parmi les 4 ne dépasse deux ans ».

$P(\overline{A}) = (1 - P(X \geq 2))^4$ d'où $P(A) = 1 - (1 - P(X \geq 2))^4 = 1 - (1 - e^{-0,4})^4 \approx 0{,}98$.

<u>Exercice n°4</u> *(6 points)*

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, distance d'un point à un plan, section d'une sphère par un plan, position relative de droites et plans.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la position relative de droites et plans, déterminer la section d'une sphère par un plan.
- ✓ **Corrigé :**

Δ est la droite passant par A(-3,-1,-3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

D est la droite passant par B(3,2,3) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

1- a)

$\vec{u}.\vec{v} = 2 - 4 + 2 = 0$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\-2 & 2 & 3\\-1 & -2 & 6\end{vmatrix} = 36+36+9 = 81$$

b) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ signifie $\vec{u} \perp \vec{v}$ signifie Δ et D sont orthogonales.

$\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) \neq 0$ signifie $\left\{\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right\}$ est une famille libre et par suite Δ et D sont non coplanaires.

c) Le plan contenant Δ et parallèle à D a pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; ainsi

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal de P , or $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}$ par suite une équation de ce plan est de la forme $6x + 3y + 6z + d = 0$ et comme $A \in P$ donc $-18 - 3 - 18 + d = 0$ signifie $d = 39$. Ainsi une équation de ce plan est $2x + y + 2z + 13 = 0$.

2- Soit S la sphère de centre C(-1,0,-1) et de rayon R = 6 .

a) $d(C, P) = \dfrac{|-2 -2 + 13|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{9}{3} = 3 < R = 6$ alors $S \cap P = \mathcal{C}$ le cercle de centre le projeté orthogonale de C sur P et de rayon r .

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P donc (AC) $\perp$ P en A d'où A es le projeté orthogonale de C sur P et par suite A est le centre de $\mathcal{C}$.

Le rayon de $\mathcal{C}$ est $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$

b) $B \in D$ et $CB = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6 = R$ donc $B \in S$ ainsi $B \in S \cap P$

D'autre part $\overrightarrow{CB}.\vec{v} = 4 + 4 - 8 = 0$ donc $\overrightarrow{CB} \perp \vec{V}$ et par suite D est tangente à S en B.

3- a) $AB = \sqrt{36+9+36} = \sqrt{81} = 9$.

$S \cap P = \mathcal{C}$ le cercle de centre A, donc AC= $d(C,P)$=3 et D est tangente à S en B donc BC =6 et par suite AB = AC+CB ce qui prouve que $C \in [AB]$.

b) $S \cap P = \mathcal{C}$ le cercle de centre A donc (AC) est perpendiculaire à P et $\Delta \subset P$ donc (AC) $\perp$ Δ .

D'autre part D est tangente à S en B donc (BC) $\perp$ D et comme $C \in [AB]$ donc (AC) $\perp$ D .

Ainsi la droite (AC) est perpendiculaire aux droites D et Δ .

Exercice n°5 *(5 points)*

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, courbe.
- ✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une fonction et tracer sa courbe.
- ✓ **Corrigé :**

$f(x) = -1 + \dfrac{x - 1}{x + 1} e^x$.

1- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2- a) Pour tout $x \in IR-\{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}e^x + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)e^x = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x > 0.$$

b) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3- a) Soit g la restriction de f sur $I =]-1,+\infty[$. g est continue et strictement croissante sur I donc g réalise une bijection de I sur IR ; donc il existe un réel α unique de I tel que $f(\alpha) = 0$.

$f(1,5) = -0,1$ et $f(1,6) = 1,143$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $1,5 < \alpha < 1,6$.

b) $f(\alpha) = 0$ signifie $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}e^{\alpha} - 1 = 0$ signifie $\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}e^{\alpha} = 1$ signifie $\dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = e^{\alpha}$.

$f(-\alpha) = -1 + \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}e^{\alpha} = -1 + \left(\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)\left(\dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\right) = -1 + 1 = 0$.

4- a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x} + \dfrac{x-1}{x+1} \times \dfrac{e^{x}}{x}\right) = +\infty$. $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b) Traçage de $\mathscr{C}$.