

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

**Exercice 1 (5 points)**

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que  $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ,

$\Omega$  est un point intérieur au triangle ABC tel que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ,

I et J sont les projetés orthogonaux de  $\Omega$  respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que  $DA = D\Omega$ .

1) Montrer que  $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

2) Soit  $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$ .

a) Justifier que R est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

b) Soit  $F = R(J)$ .

Montrer que F est un point de la demi-droite  $[\Omega I]$ . Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre  $\Omega$  et telle que  $h(F) = I$ . On pose  $f = h \circ R$ .

a) Vérifier que  $f(J) = I$ .

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer  $\frac{\Omega I}{\Omega A}$  et  $\frac{\Omega A}{\Omega J}$ . (On donne  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ).

En déduire que le rapport de f est égal à  $1 + \sqrt{3}$ .

4) Soit g la similitude indirecte de centre  $\Omega$  telle que  $g(J) = I$ .

a) Montrer que  $g = f \circ S_{(\Omega J)}$ .

b) Déterminer le rapport de g.

c) Montrer que l'axe de g est la droite  $(\Omega D)$ .

d) Montrer que  $g = h \circ S_{(\Omega D)}$ .

e) La droite  $(\Omega D)$  coupe la droite (BC) en un point K. On pose  $K' = g(K)$ .

Vérifier que  $h(K) = K'$ . Construire alors le point  $K'$ .

### Exercice 2 (3,5 points)

L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

$(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$  est un repère orthonormé direct de l'espace.

1) a) Montrer que  $\overline{EC} \wedge \overline{ED} = \overline{AH}$ .

b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.

2) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{3}{4}$ .

On pose  $M = h(D)$ .

a) Le plan passant par  $M$  et parallèle au plan  $(DCG)$  coupe les segments  $[AC]$  et  $[AG]$  respectivement en  $N$  et  $P$ . Montrer que  $h(C) = N$  et  $h(G) = P$ .

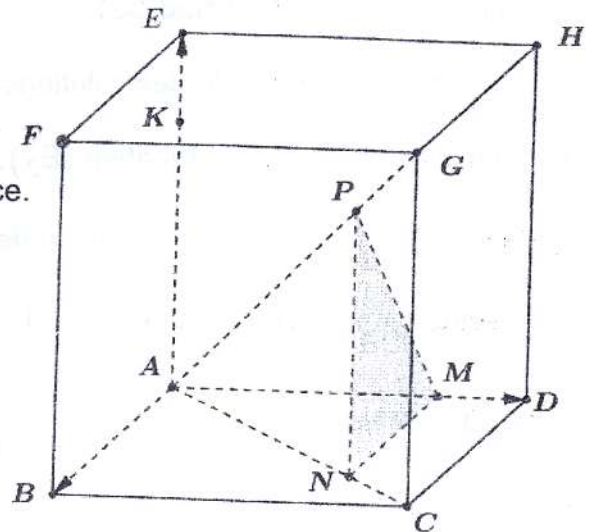
b) Le plan passant par  $M$  et parallèle au plan  $(ECD)$  coupe la droite  $(AE)$  en un point  $K$ .  
Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

3) Soit  $(S)$  la sphère de centre le point  $I \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

a) Montrer que la sphère  $(S)$  coupe le plan  $(DCG)$  suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Soit  $(S')$  l'image de la sphère  $(S)$  par l'homothétie  $h$ .

Montrer que  $(S')$  coupe le plan  $(MNP)$  suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.



### Exercice 3 (4 points)

1) Soit  $x$  un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de  $x^{52}$ .

b) En déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,  $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$ .

2) Soit l'équation  $(E_1): x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ , où  $x \in \mathbb{Z}$ .

Montrer que  $2^9$  est une solution de  $(E_1)$ .

3) Soit  $x$  une solution de l'équation  $(E_1)$ .

a) Montrer que  $x$  est premier avec 53.

b) Montrer que  $x^{261} \equiv x \pmod{53}$ .

c) En déduire que  $x \equiv 2^9 \pmod{53}$ .



4) a) Montrer que  $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$ .

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $(E_1)$ .

5) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E_2)$ :  $71u - 53v = 1$ .

a) Vérifier que  $(3, 4)$  est une solution de l'équation  $(E_2)$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E_2)$ .

6) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système 
$$\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$$

#### Exercice 4 (7,5 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d) En déduire que  $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$ , si et seulement si,  $x \leq \ln(2)$ .

3) Montrer que le point  $B(\ln 2, 1)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$ .

4) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $\Gamma$  de

la fonction  $x \mapsto e^x - 1$ .

a) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $\Gamma$ .

b) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $g(x) = \tan(x)$ .

a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $[0, +\infty[$ . On note  $g^{-1}$  sa fonction réciproque.

b) Calculer  $(g^{-1})(0)$  et  $(g^{-1})(1)$ .

c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

d) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$ .

6) On pose pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  et  $G(x) = 2 \left( f(x) - (g^{-1} \circ f)(x) \right)$ .

a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = G'(x)$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $F(x) = G(x)$ .

c) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$ , la courbe  $\Gamma$  et les droites

d'équations  $x = 0$  et  $x = \ln 2$ . Montrer que  $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$ .

7) Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

On désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $[\ln(n), +\infty[$  par  $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$ .

On note  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Soit  $G_n$  la fonction définie sur  $[\ln(n), +\infty[$  par  $G_n(x) = 2 \left( f_n(x) - \sqrt{n} g^{-1} \left( \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right)$ .

Montrer que pour tout  $x \in [\ln(n), +\infty[$ ,  $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$ .

b) Vérifier que pour tout  $x \geq \ln(n)$ ,  $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$ .

En déduire que pour tout  $x \geq \ln(n)$ ,  $f_n(x) \leq e^x - 1$ .

c) Soit  $A_n$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_n)$ , la courbe  $\Gamma$  et les droites

d'équations  $x = \ln(n)$  et  $x = \ln(n+1)$ . Montrer que  $A_n = 2 \sqrt{n} g^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left( \frac{n}{n+1} \right) - 1$ .

d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

Empty box for identification.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et Prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants  
.....  
.....

✂  
Empty box for marking.

**Épreuve : Mathématiques      Section : Mathématiques**  
**Annexe 1 à rendre avec la copie**

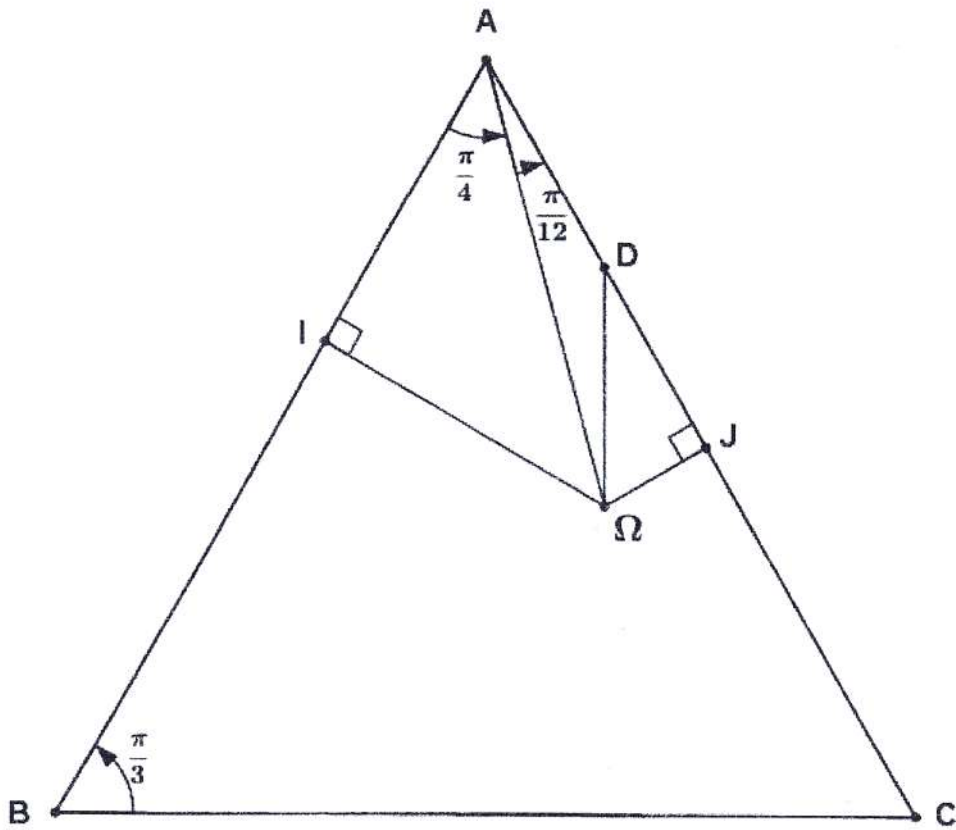


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

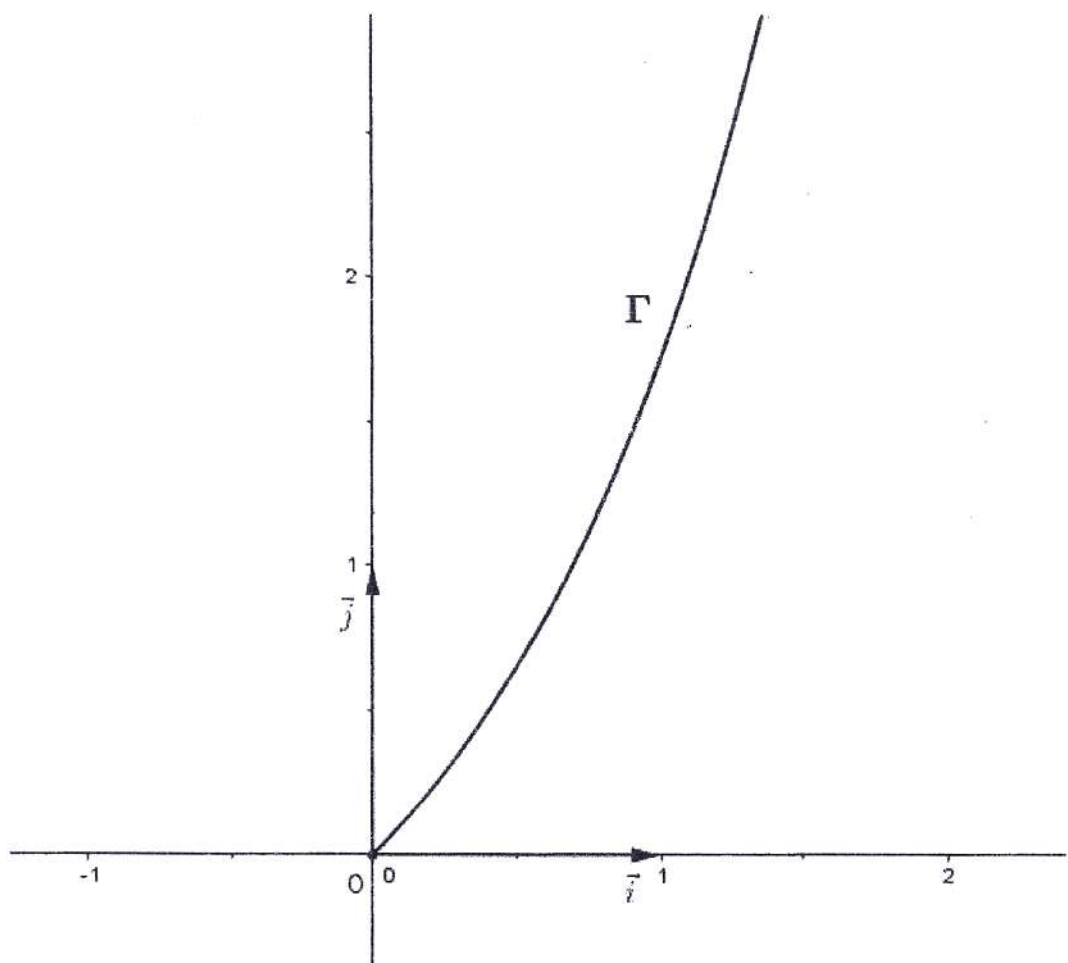


Figure 2